

# CONTROLLI AUTOMATICI

A.A. 2010/2011

## Introduzione al Corso

Due problemi di notevole interesse ingegneristico sono quelli dell'*analisi* di un generico sistema reale, naturale o artificiale, per acquisire informazioni sul suo comportamento, e della *sintesi* di un adatto dispositivo, denominato controllore, da connettere a tale sistema in grado di forzare l'intero sistema a comportarsi nel modo desiderato.

Un sistema reale può essere definito come quell'ente che evolve nel tempo a seguito di azioni esercitate su di esso dall'esterno. In generale, esso è costituito da un insieme di componenti che interagiscono fra loro al fine di conseguire obiettivi prefissati.

Alcuni esempi di sistemi reali sono i seguenti.

- Un insieme massa-molla-smorzatore che costituisce, ad esempio, un modello fisico di una sospensione passiva di un autoveicolo; se si inserisce anche un dispositivo in grado di generare forze meccaniche, denominato attuatore, si ottiene una sospensione attiva.
- Un motore che è un sistema il cui scopo è quello di imporre un movimento a un dato carico in accordo a una legge ben precisa che impone un certo andamento temporale, ad esempio, per la posizione lineare o angolare o per la velocità.
- Un manipolatore robotico è un sistema i cui scopi sono quelli di manipolare oggetti o di forzare la parte terminale, l'end effector, a seguire particolari traiettorie, ad esempio, per operazioni di verniciatura di parti di autoveicoli, per operazioni nello spazio o in ambienti che l'uomo non può frequentare come il nocciolo di un reattore nucleare.
- Un aeromobile il cui obiettivo è ben noto.
- Uno scaldabagno il cui obiettivo è quello di portare la temperatura dell'acqua a un prefissato valore.
- Una navicella spaziale.
- Una centrale elettrica il cui obiettivo è quello di produrre energia elettrica con valori della tensione e della frequenza ben definiti.
- Una raffineria di petrolio.
- Un pendolo inverso, costituito da un'asta incernierata all'estremità inferiore e la cui estremità superiore è libera, ha come obiettivo prefissato quello di mantenere verticale l'asta del pendolo. Un sistema reale che può essere assimilato a un pendolo inverso è costituito da una batteria lanciarazzi sistemata sopra un veicolo mobile.

### *Analisi*

L'analisi ingegneristica di un sistema reale ha come obiettivo quello di migliorare e, se possibile, ottimizzare il comportamento del sistema stesso dal punto di vista dell'affidabilità e dell'efficienza.

Per effettuare l'analisi di un sistema occorre, anzitutto, individuare le grandezze mediante le quali è possibile stimolare l'evoluzione del sistema, denominate *grandezze di ingresso*, e le grandezze il cui andamento temporale è di particolare interesse per giudicare le prestazioni del sistema, denominate *grandezze di uscita*.

Per valutare le prestazioni del sistema è, allora, possibile sollecitarlo con opportuni andamenti temporali delle grandezze di ingresso e rilevare i corrispondenti andamenti temporali delle grandezze di uscita.

Tale valutazione può essere condotta nei seguenti due modi:

- a) utilizzando un approccio teorico;
- b) utilizzando un approccio sperimentale.

L'approccio teorico si basa sulla conoscenza di un modello matematico sufficientemente accurato del sistema reale, costituito da un insieme di grandezze e dalle relazioni matematiche fra tali grandezze. Tale approccio consiste nell'effettuare lo studio del sistema reale utilizzando il modello matematico del sistema stesso. Lo studio in questione presenta due aspetti. Un aspetto riguarda la individuazione di proprietà del modello che si riflettono in prestazioni che il sistema reale è in grado di fornire. L'altro aspetto consiste nella determinazione degli andamenti temporali delle grandezze di uscita corrispondenti a certi andamenti temporali delle grandezze di ingresso, risolvendo le equazioni che costituiscono il suddetto modello matematico. Tale aspetto viene sviluppato mediante esperimenti di simulazione digitale.

Infatti, poiché in molti casi risulta impossibile o oneroso, dal punto di vista computazionale, risolvere analiticamente le equazioni del sistema, conviene determinare una soluzione numerica delle equazioni stesse avvalendosi dell'ausilio di un computer. A tal fine occorre implementare il modello sul computer stesso. Poiché, di solito, il modello matematico che viene associato ad un sistema reale è costituito da equazioni differenziali mentre i computer sono in grado di eseguire solamente operazioni logiche e aritmetiche, l'implementazione del modello richiede l'impiego di opportuni metodi che dipendono dalla sua struttura.

La costruzione di un adeguato modello matematico può essere effettuata:

1. utilizzando tecniche di identificazione che permettono di costruire un modello del sistema a partire da dati sperimentali relativi alle suddette grandezze;
2. utilizzando le leggi della fisica, chimica, economia, etc. che descrivono il comportamento dei componenti del sistema.

In entrambi i casi risulta opportuno validare sperimentalmente il modello matematico costruito sottoponendo, ad esempio, il modello stesso e il sistema reale agli stessi ingressi e rilevando e confrontando le corrispondenti risposte.

I vantaggi dell'approccio teorico sono connessi al fatto che non è necessario disporre del sistema reale per la sua analisi che, pertanto, risulta relativamente poco costosa e priva di rischi. Inoltre, è possibile determinare anche l'andamento delle grandezze che non sono accessibili per la misura. Gli svantaggi sono connessi al fatto che il modello matematico che può essere associato al sistema costituisce una descrizione approssimata del sistema stesso; inoltre, l'implementazione del modello richiede sempre il ricorso a certe approssimazioni.

L'approccio sperimentale consiste nell'effettuare alcune prove sperimentali sul sistema reale, sollecitandolo con opportuni andamenti temporali delle grandezze di ingresso e rilevando mediante apposita strumentazione gli andamenti temporali delle grandezze di uscita.

I vantaggi di tale approccio sono connessi al fatto che i risultati ottenuti sono relativi al sistema reale e non a una sua rappresentazione matematica approssimata. Gli svantaggi sono connessi al fatto che è necessario disporre di un prototipo del sistema su cui eseguire gli esperimenti, il che risulta notevolmente costoso e rischioso per l'integrità del prototipo stesso. Inoltre, particolare cura deve essere posta nella scelta della strumentazione impiegata e

nell'interpretazione dei risultati ottenuti, poichè i dati rilevati sperimentalmente sono, in generale, corrotti da segnali di rumore, cioè segnali aleatori sovrapposti a quelli reali introdotti dalla modalità con cui opera la strumentazione o da fenomeni di varia natura.

### *Sintesi*

In generale, i sistemi reali sono solo “potenzialmente” in grado di conseguire gli obiettivi prefissati (ovvero di comportarsi nella maniera desiderata), nel senso che il conseguimento di tali obiettivi è possibile solamente se su tali sistemi vengono esercitate adatte azioni dall'esterno denominate *azioni di controllo*. Il controllo può esercitarsi con o senza l'intervento diretto dell'uomo; il controllo che si esercita senza l'intervento diretto dell'uomo viene denominato *controllo automatico*. Le succitate azioni di controllo vengono generate dal un secondo sistema, denominato *sistema controllante* o *controllore*, che viene opportunamente interconnesso con il sistema al quale si desidera imporre il comportamento desiderato, denominato *sistema controllato*.

Per illustrare gli aspetti fondamentali di un problema di controllo si consideri il seguente problema analogo a quello del controllo di un pendolo inverso. Il sistema controllato è un'asta poggiata sul palmo della mano di un uomo e il comportamento desiderato è mantenere verticale l'asta stessa muovendo solamente la mano (*modalità di controllo 1*); altre modalità che potrebbero essere utilizzate sono quelle di mantenere ferma la mano (*modalità di controllo 2*) e spostarsi nello spazio circostante, oppure muovere nel contempo la mano e spostarsi nello spazio circostante (*modalità di controllo 3*). Ovviamente, il controllo avviene con l'intervento dell'uomo ed è quindi manuale, cioè non automatico.

E' facile verificare che quale che sia la modalità di controllo si riesce sempre a conseguire l'obiettivo prefissato. Naturalmente, è più facile conseguire il succitato obiettivo utilizzando la terza modalità di controllo poiché non esistono vincoli sulle azioni di controllo che possono essere esercitate sull'asta dall'uomo. E' anche abbastanza semplice mettere in evidenza i meccanismi che portano a conseguire l'obiettivo prefissato.

- L'uomo spostandosi in varie direzioni o spostando il palmo della mano esercita delle azioni sul sistema controllato; gli organi motori dell'uomo agiscono come *attuatori*.
- La decisione delle azioni più idonee vengono prese dal cervello dell'uomo che agisce da *controllore*.
- Le decisioni vengono prese sulla base delle osservazioni della posizione attuale dell'asta e della sua tendenza che esprimono il *comportamento effettivo* del sistema e sulla posizione desiderata dell'asta che esprime il *comportamento desiderato* o *set-point*. Più precisamente, le decisioni vengono elaborate a partire dal confronto fra set-point e comportamento effettivo. Il dispositivo di confronto viene denominato *comparatore*.
- Le osservazioni della posizione attuale dell'asta e della sua tendenza futura vengono catturate dagli occhi che agiscono da *sensori di misura* e vengono trasmesse al cervello mediante il sistema nervoso.
- Il risultato delle elaborazioni del controllore (il cervello), costituisce la *legge di controllo* che viene trasmessa agli organi motori dal sistema nervoso centrale. Tale legge viene elaborata a partire dai risultati del confronto fra comportamento effettivo e desiderato. L'insieme costituito dal comparatore e dal compensatore viene denominato *controllore*.

Uno schema a blocchi strutturale che evidenzia i meccanismi succitati è illustrato nella Fig. 1. Lo schema a blocchi di Fig. 1 ha validità del tutto generale.

Gli obiettivi considerati nell'esempio illustrato sono analoghi a quelli che è chiamato a perseguire un pendolo inverso il cui schema è riportato nella Fig. 2. Il pendolo è incernierato alla sommità di un carrello che è azionato da motori elettrici; il movimento del carrello che trasporta il pendolo può avvenire solamente in una direzione e l'obiettivo che si pone è quello di mantenere il pendolo in posizione verticale. Con riferimento allo schema di Fig. 1, valgono le seguenti considerazioni.

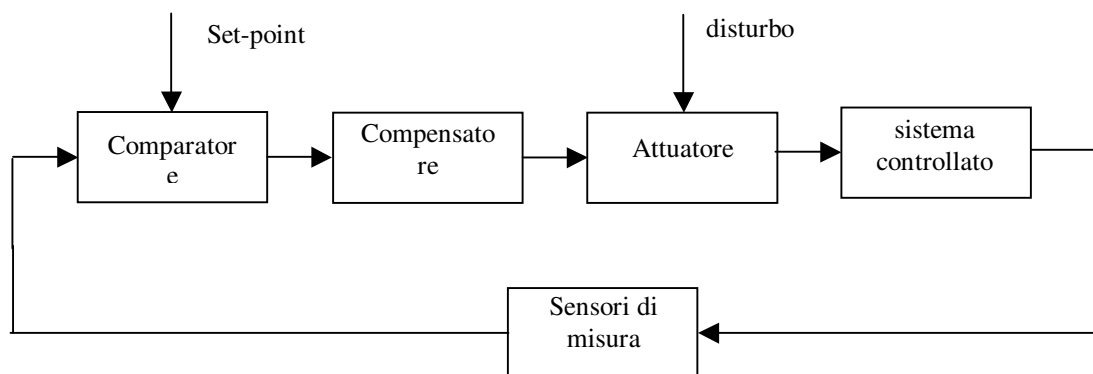


Fig. 1 Schema a blocchi strutturale del sistema di controllo in esame.

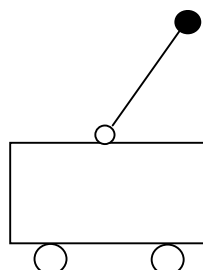


Fig. 2 Pendolo inverso.

- Le informazioni sul comportamento effettivo vengono acquisite misurando l'angolo formato dal pendolo con la direzione verticale attuale. Il sensore di misura potrebbe essere un encoder assoluto che fornisce la misura dell'angolo direttamente in formato digitale.
- Il comparatore e il compensatore possono essere realizzati, rispettivamente, mediante un amplificatore elettronico differenziale e un dispositivo elettronico di tipo analogico.
- L'attuatore è costituito dall'insieme dei motori elettrici che sono calettati sulle ruote e forzano il carrello a muoversi in una delle due direzioni ammissibili.

*Esempio 1.1.1 Si desidera mantenere costante la temperatura all'interno della cabina di un aeromobile a terra e in volo.*

Il sistema reale è costituito dai dispositivi di riscaldamento-condizionamento, dalla cabina dell'aeromobile e dall'ambiente esterno. E' ovvio che tale sistema non è in grado di conseguire l'obiettivo prefissato. Infatti, se il dispositivo di riscaldamento-condizionamento

fosse mantenuto sempre in funzione nello stato di riscaldamento la temperatura all'interno della cabina aumenterebbe fino a un certo valore massimo, mentre se il succitato dispositivo fosse mantenuto sempre in funzione nello stato di condizionamento la temperatura della cabina tenderebbe a un certo valore minimo.

Per conseguire l'obiettivo prefissato occorre interconnettere il succitato sistema con un controllore che decida lo stato del dispositivo di riscaldamento-condizionamento in funzione della temperatura desiderata e di quella attuale nella cabina.  $\Delta$

Per quanto concerne la determinazione della *legge di controllo*, o ciò che è lo stesso, la *progettazione* o la *sintesi* del controllore, esistono due approcci fondamentali, l'approccio basato su modello e quello basato su regole. Entrambi gli approcci richiedono una descrizione del comportamento del sistema.

L'approccio basato su modello richiede la conoscenza di una descrizione matematica del comportamento del sistema controllato costituita, in generale, da un insieme di relazioni fra le grandezze di ingresso e le grandezze di uscita. Le relazioni in questione vengono denominate *relazioni ingresso-uscita*. Anche il controllore viene matematicamente descritto da relazioni ingresso-uscita.

L'approccio basato su regole richiede la conoscenza di una descrizione linguistica del comportamento del sistema. Un esempio tipico di controllori basati su regole che coinvolgono variabili linguistiche è costituito dai *controllori fuzzy*.

Conviene, adesso, illustrare alcune notazioni sulle funzioni del tempo e una classificazione delle grandezze che è possibile associare a un sistema reale.

### Notazioni sulle funzioni del tempo

Sia  $T$  l'insieme dei valori del tempo, che può coincidere, o meno, con  $(-\infty, +\infty)$ . Una funzione del tempo  $v$  definita su  $T$  verrà indicata con  $v(\cdot)$ . Il valore che essa assume all'istante generico  $t$  sarà invece indicato con  $v(t)$ .

Si consideri ora un intervallo di osservazione contenuto in  $T$ , definito come segue:

$$[t_0, t] = \{\tau : t_0 \leq \tau \leq t; t_0, t \in T\}$$

e una funzione del tempo  $v(\cdot)$ . Dicesi restrizione di  $v(\cdot)$  nell'intervallo  $[t_0, t]$ , o segmento della funzione  $v(\cdot)$ , l'insieme delle coppie ordinate  $(\tau, v(\tau))$  con  $\tau \in [t_0, t]$ . In simboli:

$$v = v_{[t_0, t]} = \{(\tau, v(\tau)) : t_0 \leq \tau \leq t; t_0, t \in T, v(\tau) \in v(\cdot)\}.$$

La fig. 1 chiarisce le definizioni precedenti nel caso in cui  $v(\cdot)$  sia scalare.

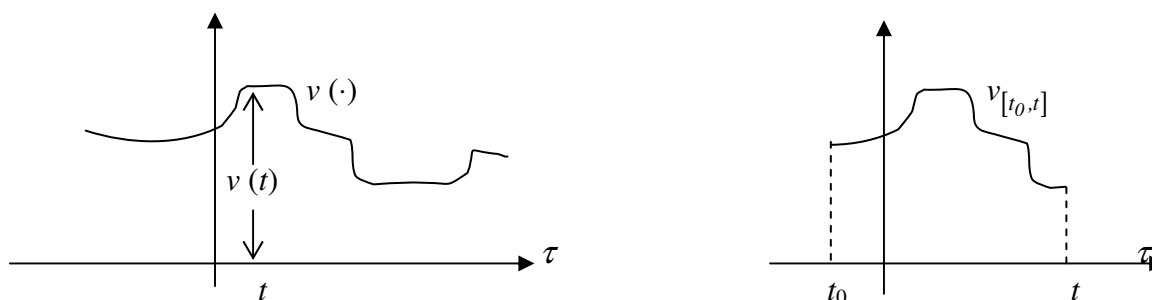


Fig. 1

Una classe di funzioni scalari del tempo si indica con  $R[v(\cdot)]$ . Con  $R[v(t)]$  invece si indica l'insieme dei valori che le funzioni  $v(\cdot)$  assumono nei vari istanti di tempo  $t$  (codominio) e, in genere, è un insieme indipendente dal tempo. La classe delle restrizioni delle funzioni  $v(\cdot)$  nell'intervallo  $[t_0, t]$  si indica infine con  $R_{[t_0, t]}$ .

Quanto detto può facilmente essere esteso al caso di funzioni vettoriali, definite come  $n$ -pla di funzioni scalari del tempo. Una generica funzione vettoriale si indica con  $\mathbf{v}(\cdot)$  e può essere rappresentata mediante notazione matriciale, come segue:

$$\mathbf{v}(\cdot) = \begin{bmatrix} v_1(\cdot) \\ v_2(\cdot) \\ \vdots \\ v_n(\cdot) \end{bmatrix}$$

Il valore che la funzione  $\mathbf{v}(\cdot)$  assume all'istante generico  $t$  è dato da:

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{bmatrix}.$$

Inoltre, si ha:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{[t_0, t]} = \{(\tau, \mathbf{v}(\tau)) : t_0 \leq \tau \leq t; t_0, t \in T, \mathbf{v}(\tau) \in \mathbf{v}(\cdot)\}.$$

### Classificazione matematica delle grandezze

Le grandezze sono matematicamente caratterizzate dai loro valori numerici variabili, in genere, nel tempo. Esistono sostanzialmente due criteri per classificare le grandezze: quello basato sulla natura dei valori del tempo in cui sono definite e quello basato sulla natura dei valori che esse assumono nel tempo.

In base all'insieme  $T$  dei valori del tempo, le grandezze si distinguono in:

- grandezze a tempo continuo, se  $T$  coincide con l'insieme, o un sottoinsieme, dei numeri reali (cfr. fig. 2);
- le grandezze a tempo discreto, se  $T$  coincide o è in corrispondenza biunivoca con l'insieme  $Z$  dei numeri interi

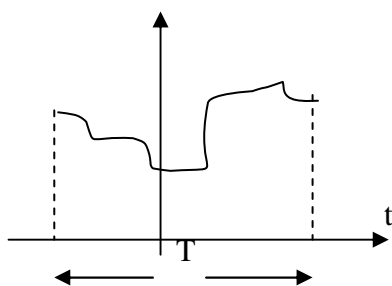


Fig. 2

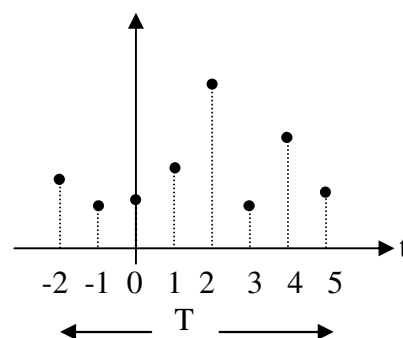
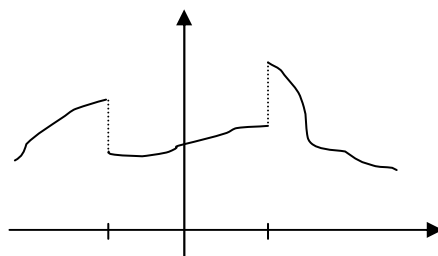


Fig. 3

Una grandezza a tempo discreto è costituita da una sequenza di valori assunti dalla grandezza in corrispondenza a valori discontinui del tempo, indicati usualmente con  $t_k$ , con  $k \in Z$ . Esse si possono rappresentare graficamente tramite diagrammi costituiti da sequenze di punti (cfr. fig. 3).

Per gli scopi di questo corso, è importante considerare grandezze a tempo continuo, alla cui classe appartengono le grandezze continue a tratti (cfr. fig. 4). In breve, si considerano continue quelle grandezze che, in un dato intervallo temporale di definizione, sono funzioni univoche del tempo, salvo in un insieme numerabile di istanti, in cui la grandezza medesima risulta discontinua.



$t_1$                        $t_2$                        $t$

Fig. 4 Grandezza continua a tratti.

In base ai valori numerici, invece, le grandezze sono classificabili in:

- grandezze a valori continui, se esse possono assumere valori qualsiasi in un dato intervallo di valori ammissibili;
- grandezze quantizzate, se possono assumere solo valori appartenenti a un insieme finito di valori.

Le grandezze quantizzate possono essere sia a tempo continuo che a tempo discreto, come illustrato nella fig. 6.

Una grandezza a tempo continuo e a valori continui viene denominata *grandezza analogica*; una grandezza a tempo discreto e quantizzata viene denominata *grandezza digitale*.

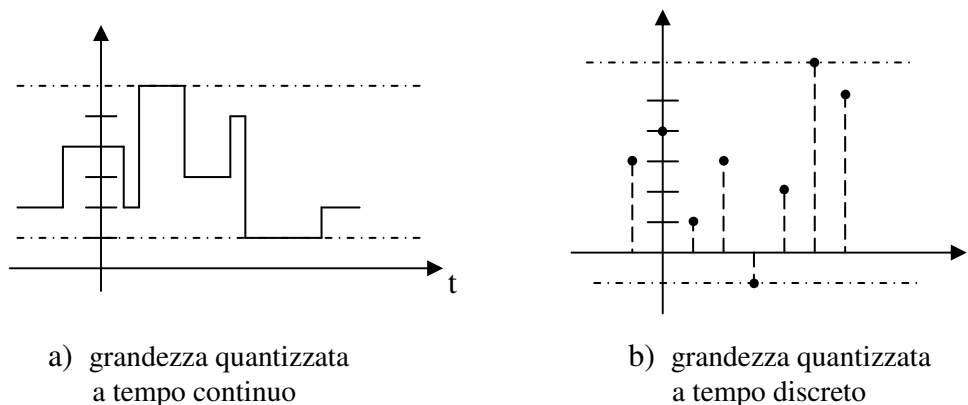


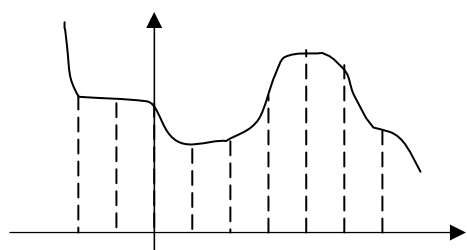
Fig. 6 Esempio di grandezza quantizzata.

Con l'avvento dei dispositivi digitali di elaborazione dell'informazione, al fine di utilizzare tali dispositivi per il trattamento delle grandezze analogiche si è reso necessario trasformare tali grandezze in formato digitale. In proposito, si noti, anzitutto, che le informazioni vengono codificate in segnali elettrici, usualmente segnali di tensione. Ne consegue che le grandezze di interesse in un generico sistema vengono codificate in segnali elettrici e quindi possono essere manipolati da dispositivi elettronici.

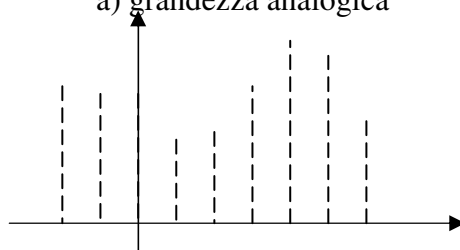
L'obiettivo di trasformazione di un segnale analogico in formato digitale viene conseguito in due passi successivi.

- Nel primo passo il segnale viene sottoposto alla operazione di *campionamento*. Nel caso ideale, tale operazione consiste nel prelevare valori del segnale (*campioni*) in corrispondenza a istanti discreti del tempo generalmente ugualmente spaziatosi di  $T_s$  (*periodo di campionamento*) (cf. Fig. 7).
- Nel secondo passo tali campioni vengono convertiti in formato digitale (sequenza di bit) da un *convertitore analogico digitale* (ADC, Analog-to-Digital Converter). Poiché un ADC fornisce in uscita una configurazione precisa di bit (12, 14, 16 bit), la grandezza digitale di uscita appare anche quantizzata.





a) grandezza analogica



b) grandezza campionata

Fig. 7 Campionamento di un segnale analogico



## CAP. 1 APPROCCIO BASATO SU MODELLO PER LO STUDIO DEI SISTEMI REALI

### 1.1 Introduzione

Come già detto nell'introduzione al corso, lo studio di un sistema reale verrà effettuato a partire dalla costruzione di un modello matematico del sistema stesso, validato sperimentalmente, ed effettuando lo studio del modello stesso.

Lo studio dei modelli matematici si è evoluto come segue:

- sono state individuate classi generali di modelli matematici;
- sono stati messi a punto metodi di studio per ognuna delle classi individuate.

Tale approccio consente di effettuare lo studio dei sistemi reali prescindendo dalla loro natura fisica, chimica, etc.. Infatti, se sono noti i metodi di studio per una certa classe di modelli matematici si è in grado di effettuare lo studio di tutti quei sistemi reali che possono essere rappresentati da modelli appartenenti a tale classe.

### 1.2 Modello matematico

Il modello matematico di un sistema reale costituisce una rappresentazione matematica del sistema stesso. Tale rappresentazione è un ente astratto, o sistema astratto, costituito da un insieme di grandezze e dalle relazioni matematiche fra tali grandezze. Ad un sistema reale possono essere associati diversi modelli matematici dipendentemente dalla scelta delle grandezze che in essi figurano.

Un punto di vista che si assume per associare un modello matematico ad un sistema reale è quello ingresso-uscita che consiste nella scelta, fra tutte le grandezze associate al sistema, di quelle mediante le quali è possibile stimolare l'evoluzione del sistema, denominate come detto *grandezze di ingresso*, e di quelle giudicate di particolare interesse per lo studio del sistema, denominate *grandezze di uscita*. Le grandezze di ingresso e quelle di uscita vengono denominate *grandezze terminali*.

Le grandezze di ingresso giocano il ruolo di grandezze indipendenti e vengono suddivise in *grandezze manipolabili* e *grandezze non manipolabili*. Le grandezze manipolabili sono quelle grandezze il cui andamento temporale può essere imposto dallo sperimentatore e, quindi, consentono di guidare l'evoluzione del sistema. Le grandezze non manipolabili sono quelle il cui andamento temporale non è noto a priori; tali grandezze stimolano l'evoluzione del sistema in maniera indesiderata e, pertanto, vengono denominate *grandezze di disturbo* o *disturbi*.

Le grandezze di uscita giocano il ruolo di grandezze dipendenti e sono quelle grandezze di particolare interesse per lo studio del sistema.

L'insieme delle grandezze di ingresso e di uscita e le relazioni matematiche fra tali grandezze costituiscono un ente astratto che appare orientato dall'ingresso verso l'uscita. Lo studio dei sistemi astratti orientati è oggetto della Teoria dei Sistemi, nell'ambito della quale il sistema astratto orientato viene definito in maniera rigorosa.

Al fine di generalizzare il concetto di modello matematico, si assuma che il sistema reale sia caratterizzato da  $p$  grandezze di ingresso e  $q$  grandezze di uscita e si indichino con  $u_j(t)$  e  $y_k(t)$  i valori assunti all'istante  $t$  dalle funzioni che esprimono l'andamento temporale, rispettivamente dell'ingresso  $j$ -esimo e dell'uscita  $k$ -esima. La  $p$ -pla di numeri  $u_1(t), \dots, u_p(t)$

può essere rappresentata mediante la matrice colonna o vettore  $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \cdots u_p(t)]^T$  appartenente ad un insieme  $U$  che coincide con  $R^p$  o con un suo sottoinsieme. In maniera analoga la  $q$ -pla di numeri  $y_1(t), \dots, y_q(t)$  può essere rappresentata mediante la matrice colonna o vettore  $\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \ \dots \ y_q(t)]^T$  appartenente a un insieme  $Y$  che coincide con  $R^q$  o con un suo sottoinsieme.

Si assuma l'insieme dei valori del tempo  $T = (-\infty, +\infty)$  e siano  $\mathbf{u}_{[t_0, t]}$  e  $\mathbf{y}_{[t_0, t]}$ , rispettivamente, un segmento di ingresso e un segmento di uscita nell'intervallo di osservazione  $[t_0, t]$ , così definiti:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{[t_0, t]} &= \{(\tau, \mathbf{u}(\tau)) : \tau \in [t_0, t], \mathbf{u}(\tau) \in U, t_0, t \in T\} \\ \mathbf{y}_{[t_0, t]} &= \{(\tau, \mathbf{y}(\tau)) : \tau \in [t_0, t], \mathbf{y}(\tau) \in Y, t_0, t \in T\} \end{aligned}$$

Il modello matematico è costituito da un meccanismo, indicato sinteticamente come segue:

$$R(\mathbf{u}_{[t_0, t]}, \mathbf{y}_{[t_0, t]}) = 0, \quad (1.2.1)$$

che permette di generare un insieme costituito da infinite coppie ingresso uscita in un generico intervallo di osservazione  $[t_0, t]$ . E' ovvio che tali coppie corrispondono in maniera approssimata a quelle generate dal sistema reale poiché nella costruzione di tale meccanismo occorre introdurre opportune ipotesi semplificative.

Gli insiemi  $R[\mathbf{u}(\cdot)]$  e  $R[\mathbf{y}(\cdot)]$  di tutte le possibili funzioni di ingresso e di uscita definiti sull'insieme dei valori del tempo  $T$ , con le quali è possibile sollecitare il sistema astratto e che tale sistema è in grado di generare, vengono denominati, rispettivamente, *spazio delle funzioni di ingresso* e *spazio delle funzioni di uscita*. Gli insiemi di tutti i segmenti di ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0, t]}$  e  $\mathbf{y}_{[t_0, t]}$ , appartenenti, rispettivamente, agli insiemi  $R[\mathbf{u}]$  e  $R[\mathbf{y}]$  vengono denominati *spazio dei segmenti di ingresso* e *spazio dei segmenti di uscita*. Gli insiemi  $U$  e  $Y$  dei valori che tutte le funzioni  $\mathbf{u}(\cdot)$  e  $\mathbf{y}(\cdot)$  assumono all'istante  $t$  sono, per ipotesi, indipendenti da  $t$  e vengono denominati *spazio di ingresso* e *spazio di uscita*. Nel seguito si supponrà che  $U = R^p$  e  $Y = R^q$ .

Il modello (1.2.1) si dice *statico* se l'uscita all'istante  $t$  dipende solamente dall'ingresso allo stesso istante  $t$ . Il modello si dice *dinamico* se l'uscita all'istante  $t$  dipende dai valori passati dell'ingresso ed, eventualmente, anche dall'ingresso all'istante  $t$ . Nel seguito si supponrà che il modello matematico associato a un generico sistema reale sia sempre di tipo dinamico.

Un modello matematico dinamico può essere rappresentato in due modi: il modello matematico ingresso-uscita (i-u) e il modello matematico ingresso-stato-uscita (i-s-u).

### 1.2.1 Modello ingresso-uscita

Il modello i-u è costituito, in generale, da un sistema di equazioni differenziali che legano variabili di ingresso e loro derivate e variabili di uscita e loro derivate. Un modello i-u si dice *lineare* se le equazioni differenziali sono lineari, altrimenti viene detto *nonlineare*. Un

modello i-u si dice *stazionario* o *tempo-invariante* se i coefficienti che figurano nelle equazioni differenziali sono costanti, altrimenti viene detto *non stazionario* o *tempo-variante*.

Una caratteristica del modello dinamico i-u è che la corrispondenza ingresso-uscita non è univoca nel senso che a una generica funzione di ingresso applicata a partire dall'istante  $t_0$  incluso possono corrispondere infinite funzioni di uscita dipendentemente dalla storia passata del sistema fino all'istante  $t_0$  escluso, prodotta dai valori passati dell'ingresso. Si noti che  $t_0$  viene escluso poichè si è ammesso che l'intervallo di osservazione comprenda tale istante.

*Esempio 1.2.1* Si desidera mantenere costante il livello di un liquido in un serbatoio.

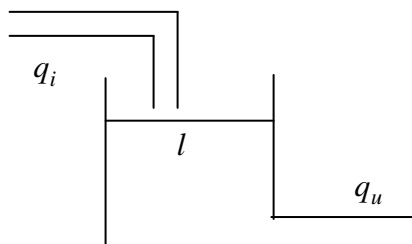


Fig. 1.1.1 Serbatoio.

Il sistema reale è illustrato schematicamente in Fig. 1. Se  $q_i > q_u$  il serbatoio si riempie totalmente; se  $q_i < q_u$  il serbatoio si svuota completamente. La grandezza di interesse è il livello  $l$  di liquido nel serbatoio e viene assunta come grandezza di uscita. La grandezza  $q_u$  si qualifica come disturbo poichè dipende dalle richieste dell'utenza e, quindi, non può essere manipolata; tuttavia, essa stimola una evoluzione indesiderata del sistema. La grandezza  $q_i$  rappresenta la grandezza che consente di guidare l'evoluzione del sistema e, pertanto, si qualifica come grandezza di ingresso manipolabile.

Una relazione matematica approssimata che descrive il sistema reale è data da:

$$(q_i - q_u)dt = Adl$$

da cui si ottiene il modello matematico ingresso-uscita:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{1}{A}(q_i - q_u),$$

che genera, in maniera approssimata, le coppie ingresso-uscita  $(q_i, l)$  del sistema reale in un generico intervallo di osservazione  $[t_0, t]$ . △

*Esempio 1.2.3 Pendolo semplice*

Si consideri il pendolo semplice illustrato nella Fig. 2, dove  $m$ ,  $l$ ,  $f$  e  $\alpha$  sono, rispettivamente, la massa concentrata alla estremità, la lunghezza del braccio, la forza applicata e la posizione angolare istantanea valutata rispetto alla verticale e positivamente in verso antiorario.

L'equazione che descrive il comportamento del sistema di Fig. 2 si ottiene dal bilancio delle coppie all'asse di rotazione ed è data da:

$$ml^2\ddot{\alpha} + b\dot{\alpha} + mgl \sin(\alpha) = fl,$$

dove il termine  $b\dot{\alpha}$  rappresenta la coppia di attrito viscoso. Tale equazione costituisce il modello matematico ingresso-uscita del sistema meccanico di Fig. 1. Essa genera tutte le possibili coppie ingresso-uscita  $(f, \alpha)$  del sistema stesso in un generico intervallo di osservazione  $[t_0, t]$ . Il modello in questione è non lineare per la presenza del terzo termine al primo membro che dipende da  $\sin(\alpha)$ . ◁

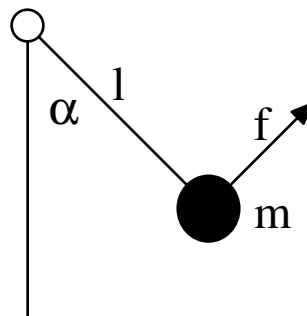


Fig. 1.1.2 Pendolo semplice

### 1.3 Modello matematico i-s-u

Una ulteriore forma in cui può essere rappresentato il meccanismo  $R(\mathbf{u}_{[t_0,t]}, \mathbf{y}_{[t_0,t]}) = 0$  nell'intervallo di osservazione  $[t_0, t]$  è il modello matematico ingresso-stato-uscita.

Tale modello trae origine dalla osservazione che per i sistemi dinamici è possibile, in molti casi, definire una nuova variabile ausiliaria vettoriale, denotata con  $\mathbf{x}(\cdot)$ , che evolve nel tempo unitamente alle variabili di ingresso e di uscita, il cui valore all'istante  $t$ ,  $\mathbf{x}(t) \in X \subseteq C^n$ , unitamente a quello dell'ingresso nello stesso istante  $t$ ,  $\mathbf{u}(t)$ , consente di determinare univocamente l'uscita all'istante  $t$ ,  $\mathbf{y}(t)$ , in accordo alla relazione:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (1.3.1)$$

dove  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot, \cdot)$  è un funzione vettoriale di ordine  $q$ . Tale variabile dipende dal valore della variabile  $\mathbf{x}(t_0) \triangleq \mathbf{x}_0$  e dal segmento di ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0,t]}$ , in accordo alla equazione:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0,t]}), \quad (1.3.2)$$

dove  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  è un funzione vettoriale di ordine  $n$ .

Si osservi che  $\mathbf{x}(t)$ , se esiste, riassume tutta la storia passata del sistema fino all'istante  $t$  escluso prodotta dai valori dell'ingresso fino all'istante  $t$  escluso.

Se la variabile  $\mathbf{x}(\cdot)$  esiste,  $\mathbf{x}_0$  e  $\mathbf{x}(t)$  vengono denominati, rispettivamente, stato iniziale e stato all'istante  $t$ ,  $X$  viene denominato *spazio di stato*. Le funzioni  $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  e  $\mathbf{g}(\cdot, \cdot, \cdot)$  vengono

denominate, rispettivamente, *funzione di transizione di stato* e *trasformazione di uscita*. Il modello (1.3.2) e (1.3.1) viene denominato *modello i-s-u in forma esplicita*.

Nella maggioranza dei casi, la funzione  $\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]})$  è la soluzione *unica* di una equazione differenziale vettoriale del tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad (1.3.3)$$

$$\forall \mathbf{x}(t_0) \triangleq \mathbf{x}_0 \in X \text{ e } \forall \mathbf{u}(\cdot) \in R[\mathbf{u}(\cdot)].$$

La funzione  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$  viene denominata *funzione generatrice* e le equazioni (1.3.3) e (1.3.1) vengono denominate *equazioni di stato in forma normale*. Tali equazioni costituiscono un modello *a tempo continuo, differenziale e proprio*. Il modello (1.3.3) e (1.3.1) viene denominato *modello i-s-u in forma implicita*.

Nel seguito verrà considerato il caso in cui  $X = C^n$ . I modelli (1.3.3) e (1.3.1) per i quali  $U = R^p$ ,  $Y = R^p$  e  $X = C^n$  vengono denominati sistemi a *stato vettore* o a *dimensione finita*.

#### Osservazione 1.3.1

Si noti che  $\mathbf{x}(t)$  non dipende dall'ingresso all'istante  $t$  poiché riassume l'evoluzione passata del sistema fino all'istante  $t$  escluso. Inoltre,  $\mathbf{x}(t)$  non dipende dall'ingresso per  $t < t_0$  poiché l'evoluzione del sistema per  $t < t_0$  è riassunta dallo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$ . Infine,  $\mathbf{x}(t)$  non dipende dall'ingresso negli istanti di tempo futuri rispetto all'istante  $t$  poiché i modelli che descrivono sistemi reali soddisfano la proprietà di causalità, illustrata nella fig. 1.3.1, in accordo alla quale l'uscita all'istante  $t$  non può dipendere dai valori dell'ingresso futuri a  $t$ . E' utile, però, considerare, per certe applicazioni, modelli non causali per i quali la succitata proprietà non è valida, ma tali sistemi non sono fisicamente realizzabili.

#### Osservazione 1.3.2

Com'è noto, condizione sufficiente affinché la succitata equazione differenziale ammetta soluzione unica è che la  $\mathbf{f}(\cdot, \cdot, \cdot)$  soddisfi la condizione di Lipschitz in accordo alla quale:

$$\exists M(\mathbf{u}): \forall \mathbf{x}(t) \in X, \forall \mathbf{z}(t) \in X \rightarrow \|\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t)\| \leq M \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}(t)\|, \forall t.$$

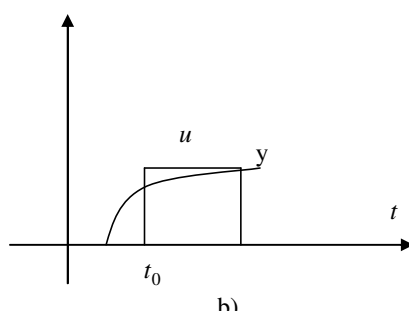
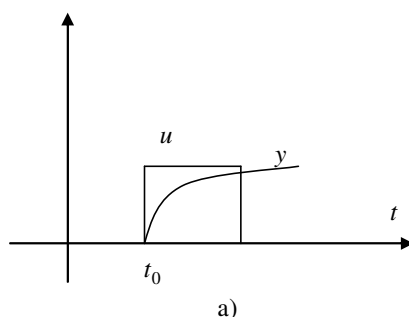


Fig. 1.3.1 Principio di causalità: a) sistema causale; b) sistema non causale.

*Osservazione 1.3.3*

Conviene osservare che non è sempre possibile riassumere la storia passata di un sistema con una n-pla di numeri. In alcuni casi occorre definire lo stato come una funzione di una o più variabili piuttosto che una n-pla di numeri. In tali casi la determinazione di un modello i-s-u può risultare molto complessa. Un esempio è costituito da un elemento di puro ritardo descritto dal modello i-u:

$$y(t) = u(t - \tau).$$

Un modello di tale tipo si ha nella descrizione matematica di un nastro trasportatore di lunghezza  $L$  che si muove a velocità costante  $V$  ( $\tau = L/V$ ) o di una linea di trasmissione di segnali. Nel caso in questione, l'uscita nell'intervallo  $[n\tau, (n+1)\tau)$  richiede la conoscenza dell'intera funzione di ingresso nell'intervallo  $[(n-1)\tau, n\tau)$ , piuttosto che una semplice nupla di numeri.  $\triangleleft$

L'esame delle (1.3.1) e (1.3.3) mette in luce l'esistenza di una funzione  $\rho(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  tale che:

$$y(t) = g(\varphi(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]}), u(t), t) = \rho(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]}). \quad (1.3.3)$$

Se le funzioni  $f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente dal tempo il modello (1.3.2) e (1.3.1) si dice *stazionario* o *tempo-invariante*. Se le funzioni  $f$  e  $g$  sono lineari rispetto a  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{u}(t)$  cioè del tipo:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \\ \mathbf{g} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  e  $\mathbf{D}(t)$  sono matrici dipendenti dal tempo, rispettivamente di ordine  $n \times n$ ,  $n \times p$ ,  $q \times n$  e  $q \times p$ , il modello risultante dato da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad (1.3.4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t), \quad (1.3.5)$$

si dice *lineare* e non *stazionario* (o *tempo-variante*). Se le succitate matrici  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{C}(t)$  e  $\mathbf{D}(t)$  sono indipendenti dal tempo, il modello (1.3.4)-(1.3.5) si dice *stazionario* (o *tempo-invariante*).

**Esempio 2.4** *Rappresentazione con lo stato per un sistema reale costituito da un insieme massa-molla-smorzatore.*



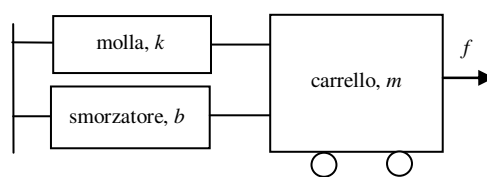


Fig. 1.3.2 Sistema massa-molla-smorzatore

Indicando con  $s$  lo spostamento del carrello, valutato positivamente verso destra, il modello del sistema di Fig. 1.3.2 è dato da:

$$m\ddot{s} + b\dot{s} + ks = f.$$

Assumendo:

$$x_1 = s, \quad x_2 = \dot{s},$$

si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}f. \end{aligned}$$

In forma matriciale, il modello diviene:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u,$$

dove  $u(t) = f(t)$ . Ponendo:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix},$$

si ottiene il modello i-s-u lineare e stazionario dato da:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u.$$

#### Osservazione 1.3.4

La stazionarietà di un modello comporta che le risposte nello stato e nell'uscita ad un ingresso traslato di  $h$  secondi lungo l'asse dei tempi e a un arbitrario stato iniziale, sono pari alle risposte corrispondenti allo stesso ingresso non traslato e allo stesso stato iniziale traslate anch'esse di  $h$  secondi lungo l'asse dei tempi, come illustrato nella fig. 1.3.2, dove  $T_h$  è l'operatore di traslazione che applicato a una funzione  $f(\cdot): T \rightarrow F$  produce una funzione  $T_h f(\cdot): T \rightarrow F$  tale che:

$$T_h f(t) = f(t-h).$$

Pertanto, per lo studio dei sistemi stazionari è possibile porre  $t_0 = 0$ , senza ledere la generalità.

*Osservazione 1.3.5*

La linearità implica il seguente *principio generalizzato di sovrapposizione degli effetti*:

Siano  $\mathbf{x}_1(\cdot)$  e  $\mathbf{y}_1(\cdot)$  ( $\mathbf{x}_2(\cdot)$  e  $\mathbf{y}_2(\cdot)$ ) le risposte corrispondenti all'ingresso  $\mathbf{u}_1(\cdot)$  ( $\mathbf{u}_2(\cdot)$ ) e allo stato iniziale  $\mathbf{x}_{10}$  ( $\mathbf{x}_{20}$ ). Allora, le risposte all'ingresso  $k_1\mathbf{u}_1(\cdot) + k_2\mathbf{u}_2(\cdot)$  e allo stato iniziale  $k_1\mathbf{x}_{10} + k_2\mathbf{x}_{20}$  sono date, rispettivamente, da  $k_1\mathbf{x}_1(\cdot) + k_2\mathbf{x}_2(\cdot)$  e  $k_1\mathbf{y}_1(\cdot) + k_2\mathbf{y}_2(\cdot)$ .

Tale principio verrà dimostrato successivamente con riferimento ai modelli lineari e stazionari.

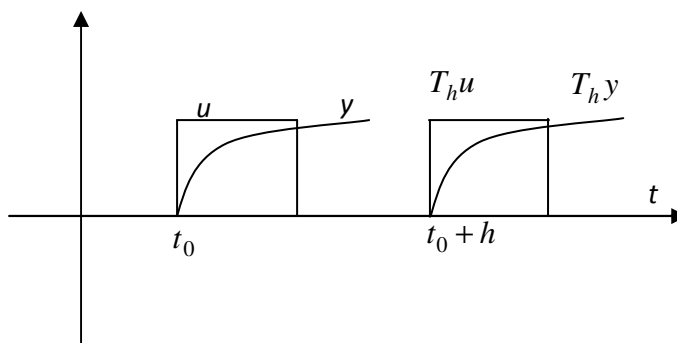


Fig. 1.3.2 Implicazione della proprietà di stazionarietà dei modelli.

*Osservazione 1.3.6*

Non esistono sistemi reali che possano essere rappresentati da modelli rigorosamente stazionari. Infatti, tutti i sistemi reali modificano il loro comportamento nel corso del loro funzionamento. A titolo di esempio, tutti i sistemi realizzati mediante dispositivi elettronici modificano le proprie caratteristiche e prestazioni con il tempo a causa dell'invecchiamento dei componenti, o delle modifiche di condizioni ambientali; un missile che viaggia nello spazio modifica il suo comportamento a causa del consumo di carburante che produce variazioni di pesi, momenti di inerzia, ecc..

Tuttavia, dal punto di vista ingegneristico e per assegnato intervallo di osservazione, se le caratteristiche del sistema variano lentamente rispetto all'intervallo di osservazione, al sistema stesso è possibile associare un modello stazionario.

*Osservazione 1.3.7*

Analogamente alla proprietà di stazionarietà, non esistono sistemi reali che possano essere rappresentati da modelli rigorosamente lineari. Se le escursioni delle grandezze in gioco non superano determinati livelli è possibile associare al sistema reale un modello lineare.

## Cap. 2 Studio nel dominio del tempo di rappresentazioni lineari, stazionarie, differenziali, proprie, a dimensioni finite e a tempo continuo.

### 2.1 Risposte nello stato e nell'uscita.

I modelli lineari, stazionari, differenziali, propri, a dimensioni finite e a tempo continuo, come già detto, hanno la seguente struttura:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.1.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2.1.2)$$

Dove le matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{D}$  hanno dimensioni:

$$\mathbf{A}: n \times n, \mathbf{B}: n \times p, \mathbf{C}: q \times n, \mathbf{D}: q \times p.$$

Si ricorda che se risulta  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , cioè se manca il legame diretto ingresso–uscita, la rappresentazione si dice puramente dinamica o strettamente propria.

Ci si pone, adesso, il seguente problema: *determinare la risposta nello stato e nell'uscita all'istante  $t \geq t_0$  corrispondente allo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  all'istante  $t_0$  e all'ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0,t]}$ .*

La soluzione di tale problema è data dalla seguente asserzione.

*Asserzione 2.1.1* Le risposte nello stato e nell'uscita all'istante  $t \geq t_0$  corrispondente allo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  all'istante  $t_0$  e all'ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0,t]}$  sono date da:

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0,t]}) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \boldsymbol{\tau})\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.1.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\rho}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0,t]}) = \boldsymbol{\Psi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t - \boldsymbol{\tau})\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}, \quad (2.1.4)$$

dove:

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}, \mathbf{H}(t) = \mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, \boldsymbol{\Psi}(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}, \mathbf{W}(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}(t). \quad (2.1.5)$$

*Prova.* Dalla (2.1.1), premoltiplicando per  $\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}$  si ottiene:

$$\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.1.6)$$

Il primo membro della (2.1.6) è la derivata rispetto al tempo di  $\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t)$ . Infatti, si ha (cfr. Appendice 2.1.1):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{e}^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{x}(t).$$

Ne consegue che la (2.1.6) può essere scritta come segue:

$$\frac{d}{dt} e^{-At} \mathbf{x}(t) = e^{-At} \mathbf{B} \mathbf{u}(t). \quad (2.1.7)$$

Integrando la (2.1.7) fra  $t_0$  e  $t$ , si ha:

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} e^{-A\tau} \mathbf{x}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

la cui soluzione è:

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) - e^{-At_0} \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau.$$

Premoltiplicando per  $e^{At}$  si ottiene:

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (2.1.8)$$

che, tenendo conto delle (2.1.5) assume la forma (2.1.3).

Sostituendo nella (2.1.2) la (2.1.8), si ottiene:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \left[ e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \right] + \mathbf{D} \mathbf{u}(t). \quad (2.1.9)$$

Osservando che, per la proprietà campionatrice dell'impulso,  $\mathbf{D} \mathbf{u}(t)$  può essere scritto come segue:

$$\mathbf{D} \mathbf{u}(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{D} \mathbf{u}(\tau) \delta(t-\tau) d\tau,$$

la (2.1.9) diviene:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \mathbf{C} e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t-\tau) \right] \mathbf{u}(\tau) d\tau,$$

che, tenendo conto delle (2.1.5), coincide con la (2.1.4). ◁

Si noti che la conoscenza della matrice esponenziale permette il calcolo di tutte le matrici del modello esplicito. Inoltre, al fine di tenere conto di eventuali discontinuità e della presenza di impulsi all'istante  $t_0$  nella funzione d'ingresso, il limite inferiore di entrambi gli integrali è esteso a  $t_{0-}$ , cioè a  $t_0 - \varepsilon$  con  $\varepsilon$  piccolo a piacere.

La matrice  $\Phi(t)$  viene denominata *matrice di transizione di stato*, mentre le matrici  $\mathbf{H}(t)$  e  $\mathbf{W}(t)$  vengono denominate, rispettivamente, *matrice delle risposte impulsive nello stato* e *matrice delle risposte impulsive nell'uscita* o, più semplicemente, *matrice delle risposte impulsive*.

Ponendo  $\mathbf{u}(t) = 0 \forall t \geq t_0$  nelle (2.1.3) e (2.1.4), si ottengono le risposte in evoluzione libera nello stato e nell'uscita date, rispettivamente da:

$$\mathbf{x}_l(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}_{[t_0, t]}) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0, \quad (2.1.10)$$

$$\mathbf{y}_l(t) = \boldsymbol{\rho}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{0}_{[t_0, t]}) = \boldsymbol{\Psi}(t - t_0)\mathbf{x}_0. \quad (2.1.11)$$

Ponendo  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  nelle (2.1.3) e (2.1.4) si ottengono le risposte in evoluzione forzata nello stato e nell'uscita date, rispettivamente, da:

$$\mathbf{x}_f(t) = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.1.12)$$

$$\mathbf{y}_f(t) = \boldsymbol{\rho}(t, t_0, \mathbf{0}, \mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \int_{t_0}^t \mathbf{W}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.1.13)$$

*Osservazione (2.1.1).* Le relazioni (2.1.3) e (2.1.4) mostrano che la linearità del modello matematico implica che le due cause di evoluzione del sistema, cioè lo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  e l'ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0, t]}$  danno luogo a due evoluzioni indipendenti fra loro, le risposte libera e forzata, la cui somma determina l'evoluzione completa del sistema.

*Osservazione (2.1.2).* Dalle relazioni (2.1.3) e (2.1.4) si evince che la stazionarietà del modello matematico implica che la risposta corrispondente allo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  all'istante  $t_0$  e all'ingresso  $\mathbf{u}_{[t_0, t]}$  si ottiene trasladando di  $t_0$  la risposta corrispondente allo stato  $\mathbf{x}_0$  all'istante 0 e all'ingresso  $T_{-t_0}\mathbf{u}_{[t_0, t]}$ . Infatti, con riferimento alla risposta nello stato, si ha:

$$\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \mathbf{x}_0, T_{-t_0}\mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{H}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau + t_0)d\tau, \quad (2.1.14)$$

$$T_{t_0}\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \mathbf{x}_0, T_{-t_0}\mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_0^{t-t_0} \mathbf{H}(t - t_0 - \tau)\mathbf{u}(\tau + t_0)d\tau, \quad (2.1.15)$$

Ponendo  $\xi = \tau + t_0$  la (2.1.15) diviene:

$$T_{t_0}\boldsymbol{\varphi}(t, 0, \mathbf{x}_0, T_{-t_0}\mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \boldsymbol{\Phi}(t - t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{H}(t - \xi)\mathbf{u}(\xi)d\xi = \boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]}). \quad (2.1.16)$$

*Osservazione (2.1.3).* La struttura delle (2.1.3) e (2.1.4) rende immediata la verifica del principio generalizzato di sovrapposizione degli effetti.

## 2.2 Interpretazione delle matrici $\boldsymbol{\Phi}(t)$ , $\mathbf{H}(t)$ , $\boldsymbol{\Psi}(t)$ e $\mathbf{W}(t)$ .

Per quanto concerne la matrice  $\boldsymbol{\Phi}(t)$ , assumendo  $t_0 = 0$  e  $\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_k$ , dove:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = [0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T, \quad (2.2.17)$$

↑  $k$ -esimo

la risposta libera nello stato,  $\mathbf{x}_{lk}$  diviene:

$$\mathbf{x}_{lk}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\phi}_k(t), \quad (2.2.18)$$

dove  $\boldsymbol{\phi}_k(t)$  è la  $k$ -esima colonna della matrice  $\Phi(t)$ . Ne consegue che la  $k$ -esima colonna della matrice  $\Phi(t)$  è la risposta libera nello stato corrispondente allo stato iniziale  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  avente componenti tutte nulle eccetto la  $k$ -esima che è pari a 1.

Con riferimento alla matrice  $\mathbf{H}(t)$ , assumendo  $t_0 = 0$ ,  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  e:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_k \delta(t), \quad (2.2.19)$$

la risposta forzata nello stato,  $\mathbf{x}_{f\delta k}(t)$ , per la proprietà campionatrice dell'impulso, è data da:

$$\mathbf{x}_{f\delta k}(t) = \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_k \delta(\tau) d\tau = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{h}_k(t), \quad (2.2.20)$$

dove  $\mathbf{h}_k(t)$  è la colonna  $k$ -esima della matrice  $\mathbf{H}(t)$ . Ne consegue che la colonna  $k$ -esima della matrice  $\mathbf{H}(t)$  è la risposta forzata nello stato corrispondente a un ingresso avente componenti tutte nulle eccetto la  $k$ -esima che è pari a un impulso di Dirac localizzato nell'origine.

Tale interpretazione giustifica la denominazione della matrice  $\mathbf{H}(t)$  e mette in evidenza il seguente vincolo su  $\mathbf{H}(t)$ :

$$\mathbf{H}(t) = \mathbf{0}, \forall t < 0, \quad (2.2.21)$$

che è una conseguenza della proprietà di causalità del modello con lo stato. Infatti, tale proprietà implica che l'effetto debba seguire sempre la causa e di conseguenza, la generica colonna  $k$ -esima di  $\mathbf{H}(t)$  deve risultare nulla per tempi negativi, che precedono l'applicazione dell'ingresso.

In maniera del tutto analoga, la risposta libera nell'uscita corrispondente allo stato iniziale (2.2.17),  $\mathbf{y}_{lk}(t)$ , e la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso (2.2.19),  $\mathbf{y}_{f\delta k}(t)$ , sono date da:

$$\mathbf{y}_{lk}(t) = \Psi(t)\boldsymbol{\varepsilon}_k = \boldsymbol{\psi}_k(t), \quad (2.2.21)$$

$$\mathbf{y}_{f\delta k}(t) = \int_0^t \mathbf{W}(t-\tau)\boldsymbol{\varepsilon}_k \delta(\tau) d\tau = \mathbf{W}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{w}_k(t). \quad (2.2.22)$$

Tale interpretazione mette in evidenza il vincolo su  $\mathbf{W}(t)$ :

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{0}, \forall t < 0.$$

## 2.3 Trasformazioni di coordinate e forme canoniche.

### 2.3.1 Trasformazione di coordinate.

Com'è noto, in uno spazio vettoriale  $C^n$  è possibile rappresentare geometricamente i suoi elementi scegliendo una base  $B_t = \{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^n$  i cui vettori  $\mathbf{t}_i, i=1, \dots, n$ , linearmente indipendenti, sono elementi dello spazio vettoriale stesso. La rappresentazione geometrica di un generico elemento  $\mathbf{x}(t) \in C^n$  nella base  $B_t$  è unica ed è data da:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{t}_i \hat{x}_i(t),$$

la quale, in forma matriciale, può essere scritta come segue:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (2.3.1)$$

dove  $\mathbf{T}$  è una matrice  $n \times n$  non singolare le cui colonne sono costituite dai vettori della base.

Gli elementi  $\hat{x}_i(t)$  di  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  sono le componenti di  $\mathbf{x}(t)$  nella base  $\{\mathbf{t}_i\}_{i=1}^n$ . Tali componenti possono essere determinate conoscendo la base reciproca  $B_t^r = \{\mathbf{r}_{ti}\}_{i=1}^n$  della base data, definita dalle relazioni:

$$(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{t}_i) = \mathbf{r}_{ij}^{*\top} \mathbf{t}_i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (2.3.2)$$

dove i simboli (\*) e ( $\top$ ) indicano, rispettivamente, le operazioni di coniugazione di vettori ad elementi complessi e di trasposizione. Infatti, si ha:

$$(\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{x}(t)) = (\mathbf{r}_{ij}, \sum_{i=1}^n \mathbf{t}_i \hat{x}_i(t)) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{t}_i \hat{x}_i(t)) = (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{t}_j \hat{x}_j(t)) = \hat{x}_j(t) (\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{t}_j) = \hat{x}_j(t).$$

Sussiste la seguente *Asserzione*

*Asserzione 2.3.1* Sia dato il modello (2.1.1) e (2.1.2) e si consideri la trasformazione di coordinate nello spazio di stato (2.3.1), dove  $\mathbf{T}$  è una matrice  $n \times n$ , non singolare e a elementi costanti la cui  $j$ -esima colonna è il vettore  $j$ -esimo della base scelta. In tale base, il modello matematico è costituito dalle equazioni:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t), \quad (2.3.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (2.3.4)$$

dove:

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \quad \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}, \quad \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}. \quad (2.3.5)$$

Inoltre, i modelli (2.1.1) - (2.1.2) e (2.3.3) - (2.3.4) sono equivalenti.

*Prova.* Sostituendo la (2.3.5) nelle (2.1.1) e (2.1.2), si ottiene:

$$\mathbf{T}\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.3.6)$$



$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (2.3.7)$$

Premoltiplicando per  $\mathbf{T}^{-1}$  la (2.3.6), si ottiene:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(t). \quad (2.3.8)$$

Le (2.3.8) e (2.3.7) hanno la struttura (2.3.3) e (2.3.4) con le posizioni (2.3.5).

Per mostrare che i due modelli sono equivalenti, basta osservare che il modello in forma esplicita corrispondente alle (2.3.3) e (2.3.4) è dato da:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(t, t_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \hat{\boldsymbol{\Phi}}(t - t_0)\hat{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{H}}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.3.9)$$

$$\mathbf{y}(t) = \hat{\boldsymbol{\rho}}(t, t_0, \hat{\mathbf{x}}_0, \mathbf{u}_{[t_0, t]}) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}(t - t_0)\hat{\mathbf{x}}_0 + \int_{t_0}^t \hat{\mathbf{W}}(t - \tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad (2.3.10)$$

dove:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\Phi}}(t) &= e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{A}}t + \frac{1}{2!}\hat{\mathbf{A}}^2t^2 + \dots = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}t + \frac{1}{2!}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\hat{\mathbf{A}}\mathbf{T}t^2 + \dots = \\ &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots)\mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(t) = e^{\hat{\mathbf{A}}t}\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, \quad (2.3.12)$$

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \hat{\mathbf{C}}e^{\hat{\mathbf{A}}t} = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T} = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}, \quad (2.3.13)$$

$$\hat{\mathbf{W}}(t) = \hat{\mathbf{C}}e^{\hat{\mathbf{A}}t}\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{D}}\delta(t) = \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) = \mathbf{W}(t). \quad (2.3.14)$$

La (2.3.10) mostra che  $\forall \mathbf{x}_0 \exists \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$  tale che l'uscita del modello (2.1.1) e (2.1.2) coincide con quella del modello (2.3.3) e (2.3.4) per tutte le funzioni di ingresso. Ovviamente, vale anche il viceversa, cioè  $\forall \hat{\mathbf{x}}_0 \exists \mathbf{x}_0 = \mathbf{T}\hat{\mathbf{x}}_0$  tale che l'uscita del modello (2.1.1) e (2.1.2) coincide con quella del modello (2.3.3) e (2.3.4) per tutte le funzioni di ingresso. Ciò implica che la due rappresentazioni sono equivalenti.  $\triangleleft$

### 2.3.2 Forme canoniche

Nel paragrafo precedente è stato mostrato che una trasformazione di coordinate nello spazio di stato porta a un nuovo modello con lo stato equivalente a quello di partenza ma con matrici  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}$  diverse dalle matrici  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  del modello di partenza. Scegliendo opportunamente la base nello spazio di stato è possibile, in certe condizioni, pervenire a un modello le cui matrici  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}$  aventi struttura conveniente per risolvere alcuni problemi di analisi e sintesi. Tali modelli vengono denominati *forme canoniche*.

Nel caso di modelli con ingresso e uscita unidimensionali, le forme canoniche di interesse sono la *forma canonica di controllo*, la *forma canonica di osservazione* e la *forma canonica diagonale*.

*Forma canonica di controllo.*

Le matrici  $A$  e  $b$  sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.3.15)$$

mentre la matrice  $c^T$  è arbitraria. Gli elementi dell'ultima riga della matrice  $A$  sono i coefficienti del polinomio caratteristico  $\Delta(\lambda)$  della matrice  $A$ , dato da:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 \quad (2.3.16)$$

*Forma canonica di osservazione.*

Le matrici  $A$  e  $c$  sono date da:

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.3.17)$$

mentre la matrice  $b$  è arbitraria. Gli elementi della prima colonna sono i coefficienti del polinomio caratteristico  $\Delta(\lambda)$  dato dalla (2.3.16).

*Forma canonica diagonale.*

La matrice  $A$  è data da:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (2.3.18)$$

mentre le matrici  $b$  e  $c^T$  sono arbitrarie. Gli elementi della diagonale principale della matrice (2.3.18) sono gli zeri del polinomio caratteristico (2.3.16), ovvero gli autovalori della matrice  $A$ .

*Osservazione 2.3.1* Come verrà illustrato nel seguito, l'esistenza di una trasformazione di coordinate nello spazio di stato, che permetta di passare dal modello assegnato a una delle forme canoniche mostrate in precedenza, è condizionata dal soddisfacimento di ben precise condizioni sul modello di partenza.

## 2.4 Analisi modale

Le espressioni (2.1.3) e (2.1.4) consentono di determinare le risposte nello stato e nell'uscita ma non mettono in evidenza il modo in cui evolve il sistema. Verrà adesso mostrato che scegliendo in maniera opportuna la base nello spazio di stato è possibile individuare modi elementari di evoluzione del sistema che dipendono dalla struttura del modello e quindi dalle matrici  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Tali modi godono delle proprietà: a) le risposte libere nello stato e nell'uscita possono essere espresse mediante combinazione lineare dei modi; b) le risposte forzate nello stato e nell'uscita possono essere ottenute a partire dai modi elementari stessi. Nel seguito verrà sviluppata l'analisi modale nel caso di autovalori distinti, rimandando quella corrispondente ad autovalori multipli che verrà sviluppata nell'ambito dello studio nel dominio di  $s$ .

### 2.4.1 Risposta nello stato

Si ammetta che la matrice  $A$  abbia autovalori distinti. Ne consegue che il suo polinomio caratteristico  $\Delta(\lambda)$ , ossia il determinante della matrice  $\lambda I - A$ , è dato da:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i),$$

dove le costanti  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), cioè gli zeri del polinomio caratteristico, sono gli autovalori. In tali condizioni, gli autovettori  $\mathbf{v}_i$  associati agli autovalori  $\lambda_i$ , definiti come quei vettori non nulli tali che:

$$A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad (2.4.1)$$

risultano linearmente indipendenti e possono quindi essere scelti come base per lo spazio di stato  $X$ .

Ne consegue che il generico elemento  $\mathbf{x}(t)$  dello spazio di stato può essere rappresentato geometricamente come combinazione lineare degli autovettori, come segue:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{x}_i(t)\mathbf{v}_i, \quad (2.4.2)$$

dove  $\hat{x}_i(t)$  rappresenta la componente di  $\mathbf{x}(t)$  lungo l'autovettore  $\mathbf{v}_i$ . La (2.4.2) può essere scritta come segue:

$$\mathbf{x}(t) = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{bmatrix} = T\hat{\mathbf{x}}(t), \quad (2.4.3)$$

dove la matrice  $T$  data da:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n], \quad (2.4.4)$$

è una matrice  $n \times n$  non singolare essendo gli autovettori linearmente indipendenti e:

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \cdots \quad \hat{x}_n]^T.$$

La (2.4.3) stabilisce una trasformazione di coordinate dalla base arbitraria di partenza alla base costituita dagli autovettori. La matrice  $\mathbf{T}$  viene denominata *matrice modale*. Dal par. (2.3.2) è noto che il modello matematico del sistema nella nuova base è dato dalle (2.3.6) e (2.3.7) dove le matrici  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  e  $\hat{\mathbf{C}}$  assumono le espressioni seguenti.

**Matrice  $\hat{\mathbf{A}}$**

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{A} \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A} \mathbf{v}_n] = \\ & \mathbf{T}^{-1} [\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \mathbf{v}_n] = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda} \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

dove  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ .

**Matrice  $\hat{\mathbf{B}}$**

Ponendo:

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix},$$

e tenendo presente la (2.4.4), si ha:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^T \end{bmatrix} [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{q}_1^T \mathbf{v}_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{q}_n^T \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{q}_n^T \mathbf{v}_n \end{bmatrix} = \mathbf{I},$$

da cui deriva:

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{v}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Ne consegue che i vettori  $\mathbf{q}_i$  coincidono con i vettori coniugati della base reciproca della base costituita dagli autovettori. Più precisamente, denotando con  $\mathbf{r}_i$  i vettori della base reciproca, si ha:

$$\mathbf{r}_i^* = \mathbf{q}_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4.6)$$

Adesso, partizionando la matrice  $\mathbf{B}$  come segue:

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{b}_p],$$

si ha:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_1) & \dots & (\mathbf{r}_1, \mathbf{b}_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{r}_n, \mathbf{b}_1) & \dots & (\mathbf{r}_n, \mathbf{b}_p) \end{bmatrix}. \quad (2.4.7)$$

Le (2.4.5) e (2.4.7) mostrano che la dinamica delle componenti di  $\mathbf{x}(t)$  lungo gli autovettori  $\mathbf{v}_i$  è espressa dalla relazione:

$$\dot{\hat{x}}_i(t) = \lambda_i \hat{x}_i(t) + \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) u_j(t), \quad (2.4.8)$$

la quale mostra che le componenti del vettore di stato lungo gli autovettori evolvono indipendentemente l'una dall'altra risultando, quindi, disaccoppiate. Tale evoluzione, corrispondente allo stato iniziale  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}_0$ , è descritta dalla relazione:

$$\hat{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} \hat{x}_{i0} + \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau,$$

dove  $\hat{x}_{i0}$ , componente di  $\mathbf{x}_0$  lungo  $\mathbf{v}_i$ , è data da  $\hat{x}_{i0} = (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0)$ . Ne consegue che:

$$\hat{x}_i(t) = e^{\lambda_i t} (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau. \quad (2.4.9)$$

Infine, dalla (2.4.2), si ottiene:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \mathbf{v}_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau. \quad (2.4.10)$$

Ponendo nella (2.4.10)  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$ , si ottiene la seguente espressione della risposta libera nello stato:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \mathbf{v}_i. \quad (2.4.11)$$

La (2.4.11) mette in evidenza che la risposta libera nello stato corrispondente a un generico stato iniziale  $\mathbf{x}_0$  è una combinazione lineare di modi elementari di evoluzione del sistema dati

da  $e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$ . I coefficienti di tale combinazione sono le componenti di  $\mathbf{x}_0$  lungo gli autovettori  $\mathbf{v}_i$ . Il generico coefficiente  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0)$  viene denominato eccitazione del modo  $i$  dovuta allo stato iniziale.

*Osservazione 2.4.1* I modi elementari di evoluzione del sistema dipendono esclusivamente dalla matrice dinamica  $\mathbf{A}$ . Inoltre, l'eccitazione del modo  $i$  è indipendente da quella degli altri modi e dipende solo dallo stato iniziale.

Ponendo nella (2.4.10)  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  si ottiene la seguente espressione della risposta forzata nello stato:

$$\mathbf{x}_f(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \mathbf{v}_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} u_j(\tau) d\tau, \quad (2.4.12)$$

che mette in evidenza che i modi elementari del sistema influiscono anche sulla risposta forzata ma in modo non lineare.

Sollecitando, adesso, il sistema con un ingresso  $\mathbf{u}(t)$  avente componenti tutte nulle eccetto la componente  $k$ -esima pari a un impulso localizzato nell'origine, si ha:

$$\mathbf{x}_{f \delta k}(t) = \mathbf{h}_k(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_k) \mathbf{v}_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_k) e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i, \quad (2.4.13)$$

dove  $\mathbf{h}_k(t)$  è la  $k$ -esima colonna della matrice  $\mathbf{H}(t)$ . La (2.4.13) mostra che la colonna  $k$ -esima della matrice delle risposte impulsive nello stato è data da una combinazione lineare di quei modi elementari del sistema per i quali risulta  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_k) \neq 0$ , che sono eccitati da un impulso applicato all'ingresso  $k$ -esimo quando tutti gli altri ingressi sono nulli. Sussistono, in proposito, la seguente definizione e il seguente teorema.

*Definizione 2.4.1* Un modo si dice eccitabile mediante impulsi in ingresso se compare in almeno una colonna della matrice  $\mathbf{H}(t)$ .

*Teorema 2.4.1* Condizione necessaria e sufficiente affinché il modo  $i$ -esimo sia eccitabile mediante impulsi in ingresso è che esista almeno una colonna della matrice  $\mathbf{B}$  tale che risulti  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_k) \neq 0$ , ovvero si abbia  $\mathbf{r}_i^{*T} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ .

*Osservazione 2.4.2* I vettori della base reciproca dipendono dalla matrice  $\mathbf{A}$  e, pertanto, la condizione di eccitabilità dei modi è una proprietà di tipo strutturale che dipende, cioè, dalla struttura del modello.

## 2.4.2 Risposta nell'uscita

Sostituendo la (2.4.10) nella (2.1.2), si ottiene:

$$\mathbf{y}(t) = \left[ \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau \right] \mathbf{C} \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{d}_j u_j(t). \quad (2.4.14)$$

Ponendo nella (2.4.14)  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$ , si ottiene la seguente espressione della risposta libera nell'uscita:

$$\mathbf{y}_l(t) = \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) \mathbf{C} \mathbf{v}_i. \quad (2.4.15)$$

La (2.4.15) mostra che assumendo che il modo  $i$ -esimo sia eccitato dallo stato iniziale  $\mathbf{x}_0$ , esso figurerà nella risposta libera nell'uscita se  $\mathbf{C} \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ . Tale modo evolve lungo il vettore  $\mathbf{C} \mathbf{v}_i$  che può essere considerato come la proiezione di  $\mathbf{v}_i$  nello spazio di uscita.

Sussistono, in proposito, la seguente definizione e il seguente teorema.

*Definizione 2.4.2* Un modo si dice osservabile attraverso l'uscita se compare nella espressione della risposta libera nell'uscita.

*Teorema 2.4.2* Condizione necessaria e sufficiente affinché il modo  $i$ -esimo sia osservabile attraverso l'uscita è che risulti  $\mathbf{C} \mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ .

*Osservazione 2.4.2* I vettori della base dipendono dalla matrice  $\mathbf{A}$  e, pertanto, la condizione di osservabilità attraverso l'uscita è una proprietà di tipo strutturale che dipende, cioè, dalla struttura del modello.

Ponendo  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$  nella (2.4.14), si ha la seguente espressione della risposta forzata nell'uscita:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_f(t) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \mathbf{C} \mathbf{v}_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} u_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^p \mathbf{d}_j u_j(t) = \\ &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \mathbf{C} \mathbf{v}_i \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} u_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^p \mathbf{d}_j u_j(t), \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

da cui emerge che la risposta forzata nell'uscita dipende dai modi elementari del sistema in maniera non lineare. Assumendo che l'ingresso abbia la forma  $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_k \delta(t)$ , la (2.4.16) si particolarizza come segue:

$$\mathbf{y}_{f\delta k}(t) = \mathbf{w}_k(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_k) e^{\lambda_i t} \mathbf{C} \mathbf{v}_i + \mathbf{d}_k \delta(t), \quad (2.4.17)$$

La quale mostra che la  $k$ -esima colonna della matrice delle risposte impulsive, per  $t > 0$ , è una combinazione lineare di quei modi che risultano nel contempo eccitabili mediante impulsi in ingresso e osservabili attraverso l'uscita. Inoltre, per  $t = 0$ , tal colonna contiene un impulso nell'origine se  $\mathbf{d}_k \neq \mathbf{0}$ .

### 2.4.3 Interpretazione geometrica dei modi

Se la matrice dinamica ha elementi reali, i coefficienti del suo polinomio caratteristico sono reali e gli autovalori possono essere reali o, a coppie, complessi e coniugati. Si ammetta,

inoltre, che anche lo stato iniziale sia reale. In queste condizioni è possibile individuare modi naturali di evoluzione corrispondenti ad autovalori reali, denominati *modi aperiodici*, e combinare i modi elementari relativi alle coppie di autovalori complessi e coniugati ottenendo funzioni pseudoperiodiche, denominate *modi pseudoperiodici*.

Per calcolare tali modi si noti che:

- a) gli autovettori associati ad autovalori reali,  $\sigma_i$ , sono reali;
- b) gli autovettori associati ad autovalori complessi sono complessi. In particolare, l'autovettore associato al generico autovalore  $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$  verrà denotato con  $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{ka} + j\mathbf{v}_{kb}$ , dove  $\mathbf{v}_{ka}$  e  $\mathbf{v}_{kb}$  sono vettori reali;
- c) se  $\lambda_{k+1} = \sigma_k - j\omega_k$  l'autovettore ad esso associato è dato da  $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k^* = \mathbf{v}_{ka} - j\mathbf{v}_{kb}$ ;
- d) i vettori della base reciproca corrispondenti a  $\mathbf{v}_k$  e  $\mathbf{v}_{k+1}$ ,  $\mathbf{r}_k$  e  $\mathbf{r}_{k+1}$ , sono dati da  $\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{ka} + j\mathbf{r}_{kb}$  e  $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_{ka} - j\mathbf{r}_{kb}$ , rispettivamente, dove  $\mathbf{r}_{ka}$  e  $\mathbf{r}_{kb}$  sono vettori reali.

Ciò premesso, si consideri la risposta libera nello stato data da:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i. \quad (2.4.18)$$

I modi aperiodici sono dati da:

$$(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) e^{\sigma_i t} \mathbf{v}_i.$$

Per determinare il generico modo pseudoperiodico, indicati con  $\lambda_k$  e  $\lambda_{k+1}$  due autovalori complessi e coniugati, il loro contributo al calcolo della risposta libera è dato da:

$$\mathbf{a}_k(t) = (\mathbf{r}_k, \mathbf{x}_0) e^{\lambda_k t} \mathbf{v}_k + (\mathbf{r}_{k+1}, \mathbf{x}_0) e^{\lambda_{k+1} t} \mathbf{v}_{k+1},$$

dove:

$$(\mathbf{r}_k, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{r}_{ka} + j\mathbf{r}_{kb}, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{r}_{ka}, \mathbf{x}_0) - j(\mathbf{r}_{kb}, \mathbf{x}_0) = M_k e^{j\phi_k},$$

con:

$$M_k = \sqrt{(\mathbf{r}_{ka}, \mathbf{x}_0)^2 + (\mathbf{r}_{kb}, \mathbf{x}_0)^2}$$

$$\phi_k = \arctg \left( \frac{-(\mathbf{r}_{kb}, \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{r}_{ka}, \mathbf{x}_0)} \right)$$

Ne consegue che:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_k(t) &= M_k e^{\sigma_k t} [e^{j(\omega_k t + \phi_k)} (\mathbf{v}_{ka} + j\mathbf{v}_{kb}) + e^{-j(\omega_k t + \phi_k)} (\mathbf{v}_{ka} - j\mathbf{v}_{kb})] = \\ &= C_k e^{\sigma_k t} [\cos(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{ka} - \sin(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{kb}] \end{aligned}$$



avendo posto  $C_k = 2M_k$ .

Se si ammette allora che, degli  $n$  autovalori della matrice  $A$ ,  $\mu$  siano reali e  $\nu$  siano a coppie complessi e coniugati, si ottiene:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} R_i e^{\sigma_i t} \mathbf{v}_i + \sum_{k=1}^{\nu} C_k e^{\sigma_k t} [\cos(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{ka} - \sin(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{kb}], \quad (2.4.19)$$

È utile, a questo punto, interpretare geometricamente i modi appena presentati.

- Il modo aperiodico  $(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0) e^{\sigma_i t} \mathbf{v}_i$  evolve lungo una traiettoria rettilinea, adagiata sull'autovettore  $\mathbf{v}_i$ , con legge oraria definita dalla funzione aperiodica  $R_i e^{\sigma_i t}$ , con  $R_i = (\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_0)$ . Tale traiettoria converge all'origine dello spazio di stato, degenera in un punto o diverge, a seconda che risulti  $\sigma_i < 0$ ,  $\sigma_i = 0$  e  $\sigma_i > 0$ , rispettivamente. La traiettoria e la legge oraria sono illustrate nella Fig. 2.4.1.

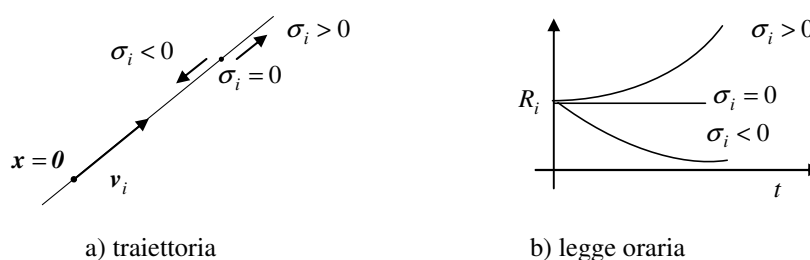


Fig. 2.4.1 Traiettoria e legge oraria relative al modo aperiodico.

Sovente, il modo aperiodico viene espresso in funzione della costante di tempo  $T_i = -1/\sigma_i$ . Il caso di maggiore interesse è quello in cui  $\sigma_i < 0$ , in corrispondenza al quale  $T_i > 0$  e il modo aperiodico converge a zero; esso converge a zero tanto più rapidamente quanto minore risulta  $T_i$ . Dopo un tempo pari a 4-5 volte  $T_i$ , il modo si riduce a 1.8% e 0.67% del valore iniziale, rispettivamente e si considera estinto.

- Il modo pseudoperiodico:

$$\mathbf{a}_k(t) = C_k e^{\sigma_k t} [\cos(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{ka} - \sin(\omega_k t + \phi_k) \mathbf{v}_{kb}],$$

evolve nel piano individuato dai vettori reali  $\mathbf{v}_{ka}$  e  $\mathbf{v}_{kb}$ ; le componenti del modo lungo tali vettori evolvono con leggi orarie date dalle funzioni pseudoperiodiche:

$$C_k e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \phi_k), \quad C_k e^{\sigma_k t} \sin(\omega_k t + \phi_k)$$

che assumono l'andamento illustrato nella Fig. 2.4.2. Si osserva che il modo converge a zero, diverge o oscilla in maniera persistente a seconda che  $\sigma_k$  risulti minore di zero, maggiore di

zero o zero, rispettivamente. Inoltre, è facile verificare che il modo converge a zero o diverge tanto più rapidamente quanto più risulta elevato il modulo di  $\sigma_k$ .

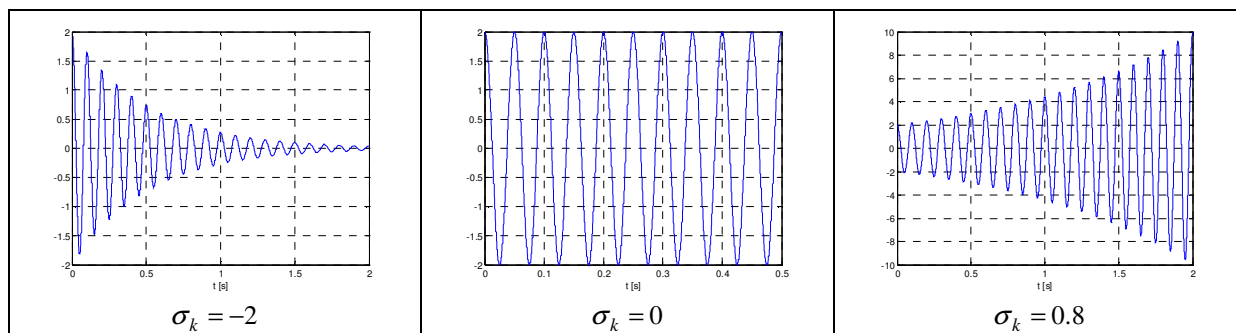


Fig. 2.4.1 Leggi orarie relative al modo aperiodico  $2e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t)$ .

Le traiettorie del modo corrispondenti sono illustrate nella Fig. 2.4.2.

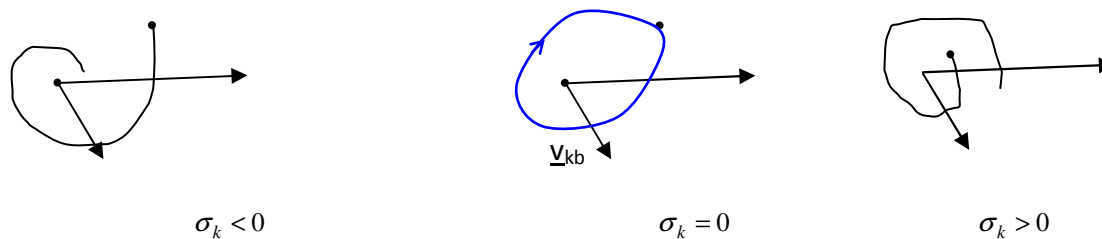


Fig. 2.4.2 Traiettorie relative al modo pseudoperiodico

Analogamente al modo aperiodico, il modo pseudoperiodico viene di solito espresso in termini della pulsazione naturale non smorzata  $\omega_{nk}$  e del coefficiente di smorzamento  $\zeta_k$ , dati da:

$$\omega_{nk} = \sqrt{\sigma_k^2 + \omega_k^2} = |\lambda_k|, \quad (2.4.20)$$

$$\zeta_k = -\frac{\sigma_k}{\omega_{nk}}. \quad (2.4.21)$$

In termini di questi ultimi parametri, il modo pseudoperiodico si esprime come segue:

$$\mathbf{a}_k(t) = C_k e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} [\cos(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \phi_k) \mathbf{v}_{ka} - \sin(\omega_{nk} \sqrt{1 - \zeta_k^2} t + \phi_k) \mathbf{v}_{kb}] \quad (2.4.22)$$

In Fig. 2.4.3 sono illustrati i parametri  $\sigma_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$  e  $\omega_{nk}$  assumendo che  $\sigma_k < 0$  e  $\zeta_k \in (0,1)$ . A parità di  $\omega_{nk}$  e al crescere di  $\zeta_k$  si nota una riduzione di  $\omega_k$  e un incremento di  $\sigma_k$  cui corrisponde una maggiore rapidità con cui il modo tende a zero e una

minore frequenza dell'oscillazione smorzata. In Fig. 2.4.4 sono illustrati gli andamenti della componente del modo lungo  $v_{kb}$  per  $\zeta_k$  pari a 0.1 e 0.7.

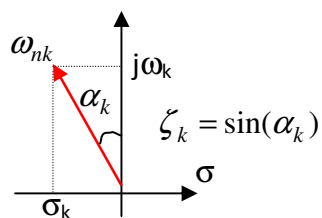


Fig. 2.4.3

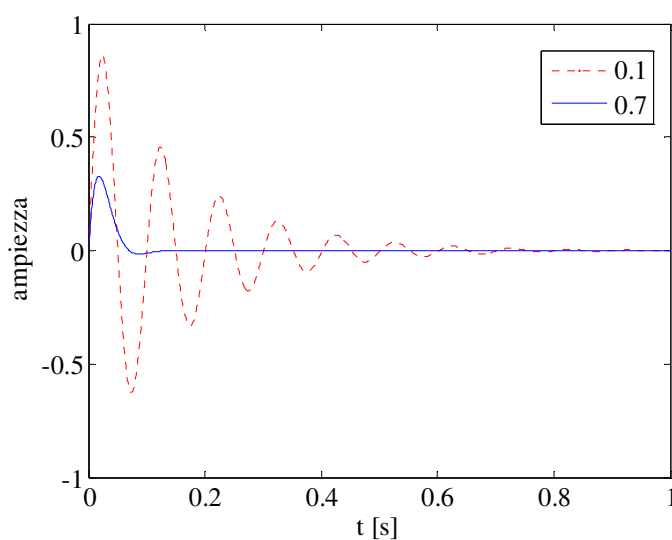


Fig. 2.4.4 Andamento della funzione  $e^{-\zeta_k \omega_{nk} t} \sin(\omega_{nk} \sqrt{1-\zeta_k^2} t)$  per  $\zeta_k$  pari a 0.1 e 0.7.

#### 2.4.4 Autovalori di $A$ multipli

Com'è noto, per il Teorema di Caley-Hamilton, ogni matrice  $A$  soddisfa la propria equazione caratteristica nel senso che, dato il polinomio caratteristico di  $A$ :

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0, \quad (2.4.23)$$

il polinomio matriciale  $\Delta(A)$ , ottenuto sostituendo nella (2.4.23) la matrice  $A$  al posto di  $\lambda$ , soddisfa la relazione:

$$\Delta(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_0I = \mathbf{0}.$$

*Esempio 2.4.1* Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è dato da:

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \left( \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 - 3\lambda + 1$$

Sostituendo a  $\lambda$  la matrice  $A$ , si ha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \triangleleft$$

Nel caso di autovalori multipli esistono polinomi di grado inferiore a  $n$ ,  $\tilde{\Delta}(\lambda)$ , tali che  $\tilde{\Delta}(A) = \mathbf{0}$ ; il polinomio di grado minimo  $\psi(\lambda)$  tale che  $\psi(A) = \mathbf{0}$ , si chiama polinomio minimo della matrice  $A$ . Esso si calcola valutando il massimo comune divisore della matrice  $(\lambda I - A)^a$ ,  $m(\lambda)$ , e dividendo il polinomio caratteristico di  $A$  per  $m(\lambda)$ .

Una proprietà del polinomio minimo è quella di avere gli stessi autovalori del polinomio caratteristico, con molteplicità minore o, al più, uguale. Assumendo che  $\Delta(\lambda)$  abbia  $r$  radici distinte ciascuna di molteplicità  $M_i$  e, quindi, sia dato da:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{M_i},$$

il polinomio minimo è pari a:

$$\psi(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{m_i}$$

dove  $m_i \in [1, M_i]$  si chiama molteplicità geometrica dell'autovalore  $\lambda_i$ .

Nel definire i modi elementari di evoluzione di un sistema occorre riferirsi al polinomio minimo di  $A$ . Si dimostra infatti che la risposta libera nello stato può essere decomposta in  $r$  modi elementari di evoluzione (tanti quanti sono gli autovalori distinti di  $A$ ), e il generico modo  $i$ , associato al generico autovalore  $\lambda_i$ , di molteplicità geometrica  $m_i$ , è dato da:

$$\gamma_i(t) = \sum_{j=0}^{m_i-1} C_{ij} t^j e^{\lambda_i t},$$

dove termini  $C_{ij}$  dipendono dallo stato iniziale; ne consegue che anche la forma temporale del modo dipende dallo stato iniziale.

Anche nel caso di autovalori multipli, condizione necessaria e sufficiente affinché un modo converga a zero per  $t \rightarrow \infty$  è che la parte reale dell'autovalore cui esso è legato sia negativa.

## 2.5 Risposte canoniche

Le risposte impulsive sono particolari risposte forzate nell'uscita corrispondenti a particolari ingressi, detti ingressi canonici, la cui conoscenza, unitamente a quella di un generico ingresso, consente di determinare la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso stesso.

Considerando per semplicità sistemi unidimensionali, ossia a un solo ingresso e una sola uscita, l'espressione della risposta forzata nell'uscita è data da (cfr. (2.1.4)):

$$y_f(t) = \int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (2.5.1)$$

dove  $w(t)$  denota la risposta impulsiva che, come detto, è la risposta forzata nell'uscita corrispondente a un ingresso costituito da un impulso di Dirac. La (2.5.1) mostra che la risposta impulsiva è una risposta canonica poiché permette di calcolare la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso  $u(t)$ .

Si può dimostrare che i segnali ottenuti integrando ripetutamente l'impulso di Dirac, dati da:

$$\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t), \quad (2.5.2)$$

sono segnali canonici. Questi segnali, a differenza dell'impulso, sono realizzabili fisicamente o approssimabili con segnali reali.

A titolo di esempio verrà considerata la risposta indiciale.

### 2.5.1 Risposta indiciale

La risposta indiciale è la risposta forzata nell'uscita corrispondente a un gradino unitario il cui andamento è illustrato in fig. 2.5.1. Tale risposta, denotata con  $w_{-1}(t)$ , è data da (cfr. (2.5.1)):

$$w_{-1}(t) = \int_0^t w(t-\tau) \delta_{-1}(\tau) d\tau = \int_0^t w(\tau) d\tau, \quad (2.5.3)$$

poiché  $\delta_{-1}(\tau) = 1$  per  $\tau \in (0,1]$  e  $\int_{0^-}^+ w(t-\tau) \delta_{-1}(\tau) d\tau$  è un infinitesimo rispetto a  $\int_0^t w(\tau) d\tau$ .

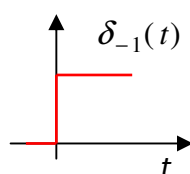


Fig. 2.5.1 Segnale a gradino unitario localizzato nell'origine.

La (2.5.3) mette in luce che la risposta impulsiva è la derivata della risposta indiciale. Ne consegue che la (2.5.1) può essere scritta come segue:

$$y_f(t) = \int_0^t \frac{dw_{-1}(t-\tau)}{d(t-\tau)} u(\tau) d\tau = \int_0^t w_{-1}(t-\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (2.5.4)$$

che mostra che è una risposta canonica poiché la sua conoscenza e quella dell'ingresso permettono di determinare univocamente la risposta forzata nell'uscita corrispondente all'ingresso. La derivata dell'ingresso che figura nella (2.5.4) va considerata “*nel senso delle distribuzioni*”, il che implica che eventuali discontinuità nell'ingresso devono essere considerate esplicitamente.

### Esempio 2.5.1

Si consideri la funzione d'ingresso mostrata in fig. 2.5.2, avente una discontinuità nell'origine. In accordo alla fig. 2.5.2, essa si può scomporre come segue:

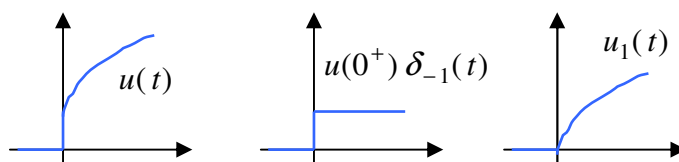


Fig. 2.5.2

$$u(t) = u(0^+) \delta_{-1}(t) + u_1(t).$$

La sua derivata è data da:

$$\frac{du(t)}{dt} = u(0^+) \delta(t) + \frac{du_1(t)}{dt}.$$

Ne consegue che la risposta forzata nell'uscita risulta:

$$\begin{aligned} y_f(t) &= \int_0^t w_{-1}(t-\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau = \int_0^t w_{-1}(t-\tau) \left[ u(0^+) \delta(\tau) + \frac{du_1(\tau)}{d\tau} \right] d\tau = \\ &= u(0^+) w_{-1}(t) + \int_{0^+}^t w_{-1}(t-\tau) \frac{du_1(\tau)}{d\tau} d\tau. \end{aligned}$$

## APPENDICE A

*Integrale di convoluzione*

Siano  $f_1(\cdot)$  e  $f_2(\cdot)$  due generiche funzioni del tempo definite su  $(-\infty, +\infty)$ . Si definisce convoluzione delle due funzioni, o integrale di convoluzione, la funzione del tempo data da:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

Se l'integrale esiste, esso si calcola moltiplicando la funzione  $f_1$  per la funzione  $f_2$  traslata di  $t$  e ribaltata di  $\tau$  rispetto all'asse verticale (cfr. Fig. A.1). L'integrale di convoluzione gode delle seguenti proprietà:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = f_2 * f_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (\text{A.2})$$

$$f_1 * f_2^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \frac{d^k}{d(t - \tau)^k} [f_2(t - \tau)] d\tau = f_1^{(k)} * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^k}{d\tau^k} [f_1(\tau)] f_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.3})$$

Se le due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  sono nulle per tempi negativi, si ha:

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \quad (\text{A.4})$$

*Impulso di Dirac*

La definizione rigorosa dell'impulso di Dirac è data nell'ambito delle funzioni generalizzate. In questa sede conviene definire l'impulso di Dirac *di area unitaria e localizzato all'istante  $t_0$*  come quell'ente matematico tale che:

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0, \quad (\text{A.5})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (\text{A.6})$$

L'impulso di Dirac si rappresenta come indicato nella Fig. A.2.

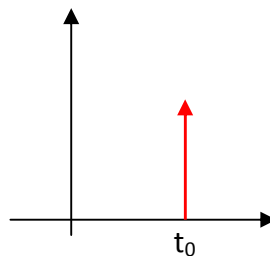


Fig. A.2 Rappresentazione grafica di  $\delta(t - t_0)$ .



Esso non è un segnale fisicamente realizzabile in laboratorio; infatti, ha durata infinitesima e ampiezza infinitamente grande. Un segnale che può essere generato in laboratorio in maniera approssimata è l'impulso rettangolare di area unitaria,  $\delta(t-t_0, \varepsilon)$ , di Fig. A.3, dato da:

$$\delta(t-t_0, \varepsilon) = \frac{\delta_{-1}(t-t_0) - \delta_{-1}(t-(t_0 + \varepsilon))}{\varepsilon}. \quad (\text{A.7})$$

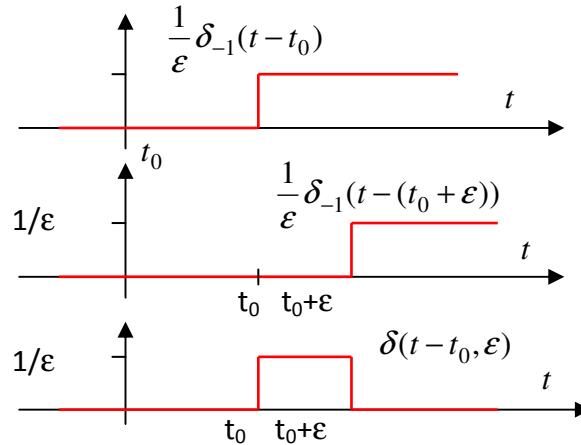


Fig. A.3 Impulso rettangolare  $\delta(t-t_0, \varepsilon)$ .

Com'è facile verificare dall'esame della Fig. A.3, si ha:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t-t_0, \varepsilon) = \delta(t-t_0). \quad (\text{A.8})$$

Poiché il limite a primo membro della A.8 è il limite del rapporto incrementale della funzione a gradino localizzata all'istante  $t_0$  (cfr. A.7) al tendere dell'incremento a zero, risulta:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t-t_0, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_{-1}(t-t_0) - \delta_{-1}(t-(t_0 + \varepsilon))}{\varepsilon} \triangleq \frac{d}{dt} \delta_{-1}(t-t_0) = \delta(t-t_0), \quad (\text{A.9})$$

la quale mostra che l'impulso è la derivata della funzione a gradino. Nell'ambito dell'analisi classica tale derivata è definita a pari a zero  $\forall t \neq t_0$ . Grazie alla definizione dell'impulso di Dirac la succitata derivata esiste  $\forall t$  e coincide con l'impulso stesso. Naturalmente, si ha:

$$\delta_{-1}(t-t_0) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau-t_0) d\tau. \quad (\text{A.10})$$

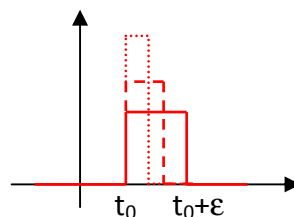


Fig. A.4 Limite dell'impulso rettangolare di Fig. 3 al tendere di  $\varepsilon$  a zero.

Generalizzando la (A.9), data la funzione discontinua di Fig. A.5 a), scomponendola nella somma delle due funzioni di Fig. A.5 b) e c), si ha:

$$f(t) = f_1(t) + [f(t_0^+) - f(t_0^-)]\delta_{-1}(t - t_0),$$

$$f^{(1)}(t) = f_1^{(1)}(t) + [f(t_0^+) - f(t_0^-)]\delta(t - t_0).$$

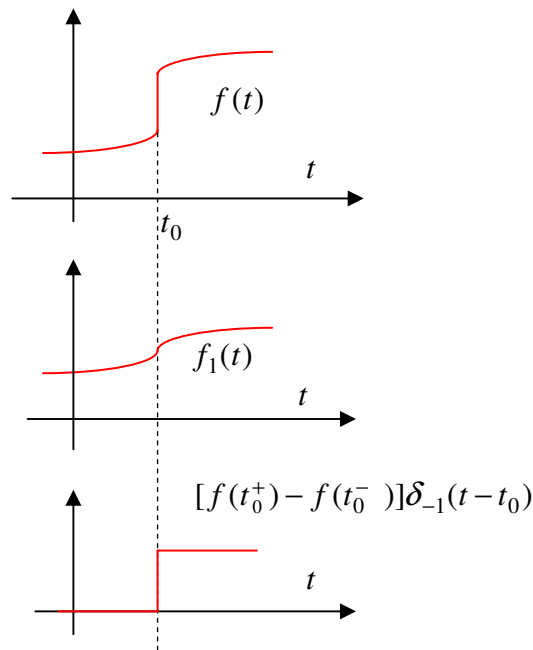


Fig. A.5

Integrando la (A.10), si ha:

$$\delta_{-2}(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \delta_{-1}(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau - t_0) d\tau, \quad (\text{A.11})$$

che è la funzione a rampa lineare localizzata all'istante  $t_0$ ; integrando la (A.11) si ottiene una funzione la rampa parabolica:

$$\delta_{-3}(t - t_0) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta_{-1}(\tau - t_0) d\tau = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\tau - t_0) d\tau, \quad (\text{A.12})$$

Le funzioni a gradino, a rampa lineare e a rampa parabolica sono illustrate nella Fig. A.6, assumendo  $t_0 = 0$ .

Adesso, data una funzione  $f(t)$  continua all'istante  $t_0$ , per la (A.5), si ha:

$$f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0),$$

da cui, per la (A.6), si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0), \quad (\text{A.13})$$

che esprime la *proprietà campionatrice dell'impulso*. Tale proprietà vale anche se i limiti di integrazione sono finiti purchè contengano l'istante  $t_0$ . Inoltre, essa vale anche per la convoluzione di una funzione  $f(t)$  continua in  $t$  e della funzione generalizzata  $\delta(t)$ . Infatti, si ha:

$$f * \delta = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)d\tau = f(t) \quad (\text{A.14})$$

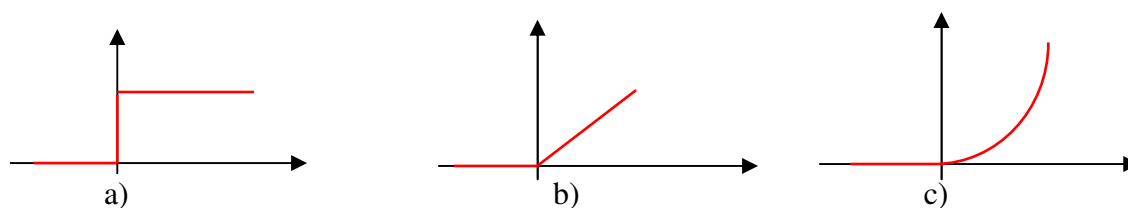


Fig. A.6 a) segnale a gradino; b) segnale a rampa lineare; c) segnale a rampa parabolica.

Oltre alla funzione a gradino a gradino, anche la funzione di Gauss data da:

$$\delta(t-t_0, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp\left[-\frac{(t-t_0)^2}{2\varepsilon^2}\right], \quad (\text{A.15})$$

soddisfa la (A.8) e può essere utilizzata per definire l'impulso di Dirac (cfr. Fig. A.7). Il vantaggio di tale funzione è connesso al fatto che a partire dalle sue derivate e facendo tendere  $\varepsilon$  a zero è possibile definire le derivate successive dell'impulso, come illustrato nella Fig. A.8.

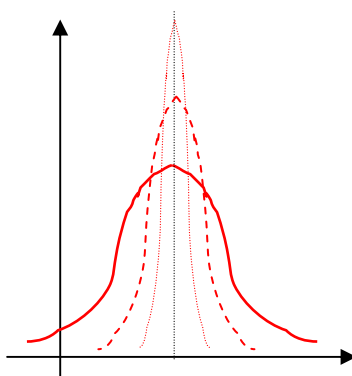


Fig. A.7 Funzione di Gauss al diminuire di  $\varepsilon$ .

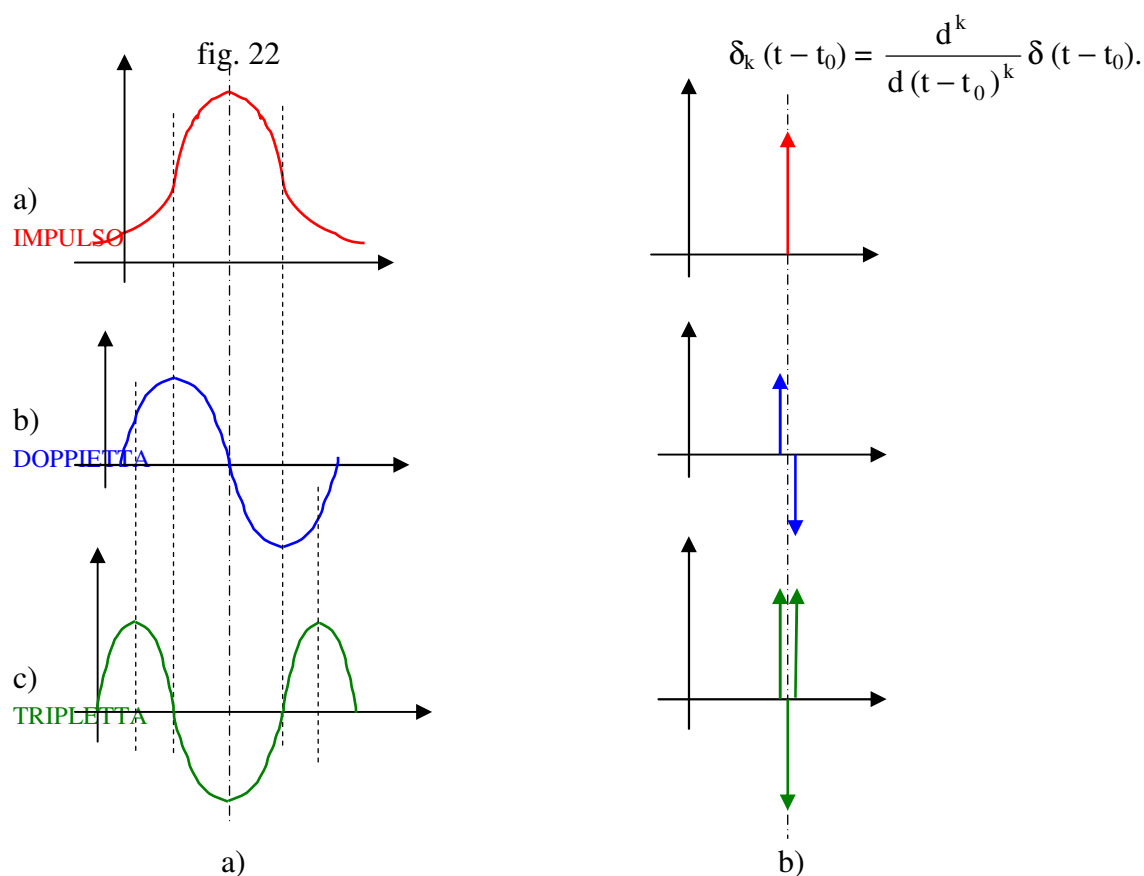


Fig. A.8 a) funzione di Gauss e sue derivate prima e seconda; b) impulso e sue derivate prima e seconda.

### Matrice esponenziale

Com'è noto, data una funzione esponenziale  $e^{\alpha t}$  con  $\alpha$  scalare, si ha:

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{1}{2!} \alpha^2 t^2 + \frac{1}{3!} \alpha^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} \alpha^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k t^k. \quad (\text{A.16})$$

In modo analogo, data una matrice  $\mathbf{A}$   $n \times n$  a elementi costanti, si definisce matrice esponenziale la seguente serie:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 t^3 + \dots + \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k, \quad (\text{A.17})$$

che risulta convergente per tutti i  $t$  finiti. La matrice esponenziale soddisfa le proprietà:

1.  $\det(e^{\mathbf{A}t}) \neq 0, \forall t;$
2.  $e^{\mathbf{A}(t_1+t_2)} = e^{\mathbf{A}t_1} e^{\mathbf{A}t_2}, \forall t_1, t_2;$

3.  $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$ ;
4.  $\frac{d}{dt} e^{At} = A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!} A^k t^{k-1} + \dots = A e^{At} = e^{At} A$

### Cap. 3

#### Studio dei modelli lineari e stazionari nel dominio di s

##### 3.1 Introduzione

Lo studio di un modello matematico nel dominio di s è di gran lunga più semplice di quello nel dominio del tempo in quanto, con opportune operazioni, si riesce a trasformare il modello costituito, in generale, da equazioni differenziali nel dominio del tempo in un modello costituito da equazioni algebriche nel dominio della variabile complessa s. Tali equazioni possono essere manipolate mediante operazioni algebriche. Poiché però il dominio in cui si riesce a interpretare fisicamente un fenomeno è il dominio del tempo, occorrerà dopo adeguate manipolazioni algebriche effettuare l'operazione inversa di trasformazione nel dominio del tempo (cf. Fig. 3.1.1)

Si considera insomma un sistema di equazioni differenziali, da cui, mediante particolari funzioni come l'operatore trasformata di Laplace, si passa a un sistema di equazioni algebriche nella variabile s, a cui corrisponde un insieme di risposte in t, ricavabile mediante l'operatore inverso (fig. 37).

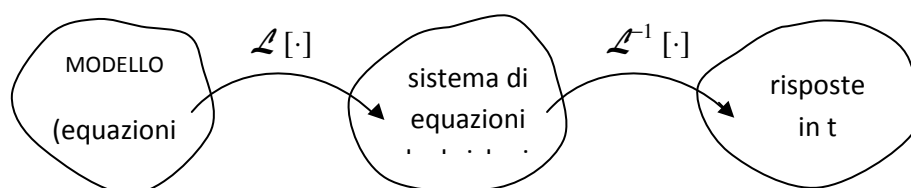


Fig. 3.1.1 Fasi dello studio nel dominio di s.

##### 3.2 Studio nel dominio di s dei modelli lineari a stazionari

In questa Sezione viene illustrato un metodo di studio basato sull'impiego della trasformata di Laplace, i cui elementi vengono presentati in Appendice 2, considerando modelli lineari e stazionari dati da:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (3.2.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t). \quad (3.2.2)$$

Trasformando secondo Laplace le (3.1.1) e (3.1.2), assumendo  $t_0 = 0$ , si ottiene:

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s), \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s), \quad (3.2.4)$$

dove  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ .

Dalla (3.2.3) si ottiene:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{U}(s),$$

da cui, premoltiplicando per  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ , si ottiene:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \quad (3.2.5)$$

che sostituita nella (3.2.4) fornisce la seguente espressione della trasformata di Laplace dell'uscita:

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0 + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s). \quad (3.2.6)$$

Trasformando, adesso, secondo Laplace le risposte nello stato e nell'uscita date da:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{H}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \\ \mathbf{y}(t) &= \Psi(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{W}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

si ottiene:

$$\mathbf{X}(s) = \Phi(s)\mathbf{x}_0 + \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \quad (3.2.7)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \Psi(s)\mathbf{x}_0 + \mathbf{W}(s)\mathbf{U}(s). \quad (3.2.8)$$

Confrontando le (3.2.7) e (3.2.8) con le (3.2.5) e (3.2.6), si ha:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \\ \mathbf{H}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \\ \Psi(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}, \\ \mathbf{W}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \end{aligned}$$

La matrice  $\mathbf{W}(s)$  data dalla trasformata di Laplace della matrice delle risposte impulsive viene denominata "matrice di trasferimento"

### 3.3 Calcolo della matrice di transizione di stato.

Dall'analisi precedente emerge che per il calcolo delle risposte libere e forzate nello stato e nell'uscita occorre calcolare la matrice di transizione di stato  $\Phi(t)$ . Dalla formula di inversione delle matrici, si ha:

$$\Phi(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^a}{\Delta(s)} = \frac{\mathbf{P}(s)}{\Delta(s)}, \quad (3.3.1)$$

dove:

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0,$$

è il polinomio caratteristico della matrice  $A$ . Poiché gli elementi della matrice  $P(s)$  minori di ordine  $n-1$  della matrice  $(sI-A)$ , essi sono polinomi di grado al più  $n-1$ . Ne consegue che  $P(s)$  può essere scritto come segue:

$$P(s) = P_{n-1}s^{n-1} + \dots + P_0,$$

dove le  $P_i(s)$  sono matrici di ordine  $n \times n$  ad elementi costanti. Ne consegue che gli elementi della matrice  $\Phi(s)$  sono funzioni razionali strettamente proprie di  $s$  e, come tali, possono essere sviluppati in frazioni parziali.

Conviene osservare che il calcolo manuale di tali elementi risulta difficile per  $n \geq 3$ . Pertanto, per valori elevati di  $n$  conviene eseguire il calcolo utilizzando adatti algoritmi. Un algoritmo diffuso è quello di Souriaux-Faddeeva basato sulle seguenti formule ricorsive:

$$\begin{aligned} P_{n-k} &= a_{n-k+1}I + AP_{n-k+1}, \\ a_{n-k} &= -\frac{1}{k} \text{tr}(AP_{n-k}), \\ k &= 2, \dots, n, \end{aligned}$$

che viene inizializzato ponendo:

$$P_{n-1} = I, \quad a_{n-1} = -\text{tr}(A),$$

essendo  $\text{tr}(Q)$  la traccia della matrice  $Q$  che è pari alla somma degli elementi della diagonale principale. La correttezza dei risultati ottenuti può essere valutata verificando il soddisfacimento della equazione:

$$a_0I + AP_0 = 0.$$

L'algoritmo in questione è facilmente implementabile su PC.

Ciò premesso, il calcolo della matrice di transizione di stato può essere effettuato in due modi dipendentemente dagli autovalori della matrice  $A$ .

### 3.3.1 Caso di autovalori distinti.

Nel caso di autovalori,  $\lambda_i$ , tutti distinti il polinomio caratteristico è dato da:

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i).$$

Lo sviluppo in frazioni parziali di  $\Phi(s)$  è dato da:

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{(s - \lambda_i)}, \quad (3.3.2)$$

dove le matrici dei residui  $R_i$  sono date da:

$$\mathbf{R}_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \Phi(s).$$

Antitrasformando la (3.3.2), si ottiene:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i e^{\lambda_i t}, \quad (3.3.3)$$

e, di conseguenza, la risposta libera nello stato risulta:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t}, \quad t \geq 0, \quad (3.3.4)$$

dove i termini  $\mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 e^{\lambda_i t}$  vengono ancora denominati modi elementari di evoluzione.

Nell'ipotesi, adesso, che i coefficienti del polinomio caratteristico siano reali, gli autovalori sono reali e a coppie complessi e coniugati. Assumendo che gli autovalori reali e complessi siano, rispettivamente,  $\mu$  e  $2\nu$ , separando il contributo dei modi corrispondenti ad autovalori reali,  $\sigma_i$ , da quello dei modi corrispondenti alle coppie di autovalori complessi e coniugati,  $\lambda_k = \sigma_k + j\omega_k$  e  $\lambda_{k+1} = \lambda_k^* = \sigma_k - j\omega_k$ , la (3.3.4) diviene:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 e^{\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{\nu} (\mathbf{R}_k \mathbf{x}_0 e^{\lambda_k t} + \mathbf{R}_k^* \mathbf{x}_0 e^{\lambda_k^* t}), \quad (3.3.5)$$

dove si è tenuto conto del fatto che le metrici dei residui corrispondenti ad autovalori complessi e coniugati sono a loro volta complesse e coniugate. Ponendo:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{ka} + j\mathbf{R}_{kb},$$

con  $\mathbf{R}_{ka}$  e  $\mathbf{R}_{kb}$  matrici reali, la (3.19) diviene:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^{\mu} \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 e^{\sigma_i t} + \sum_{k=1}^{\nu} e^{\sigma_k t} [2\mathbf{R}_{ka} \mathbf{x}_0 \cos(\omega_k t) - 2\mathbf{R}_{kb} \mathbf{x}_0 \sin(\omega_k t)]. \quad (3.3.6)$$

I termini:

$$\begin{aligned} & \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 e^{\sigma_i t}, \\ & e^{\sigma_k t} [2\mathbf{R}_{ka} \mathbf{x}_0 \cos(\omega_k t) - 2\mathbf{R}_{kb} \mathbf{x}_0 \sin(\omega_k t)], \end{aligned}$$

vengono ancoradenominati, rispettivamente, “modi aperiodici” e “modi pseudoperiodici”. La (3.3.6) mostra che la  $m$ -esima componente di  $\mathbf{x}_l(t)$  è una combinazione lineare di funzioni aperiodiche e pseudoperiodiche date, rispettivamente, da:

$$\begin{aligned} & e^{\sigma_i t}, \\ & e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k t + \varphi_k), \end{aligned}$$



### 3.3.2 Caso di autovalori multipli.

Il polinomio caratteristico di  $\mathbf{A}$  e la matrice  $\Phi(s)$  possono essere scritte come segue:

$$\Delta(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{M_i} \quad (3.3.7)$$

$$\Phi(s) = \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^a}{\Delta(s)}. \quad (3.3.8)$$

Nel caso di autovalori multipli può accadere che esistano fattori comuni fra tutti gli elementi della matrice  $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^a$  e il polinomio caratteristico  $\Delta(s)$ . Cancellando tali fattori, si ha:

$$\Phi(s) = \frac{\mathbf{Q}(s)}{\psi(s)}, \quad (3.3.9)$$

dove  $\mathbf{Q}(s)$  è una matrice  $n \times n$  e  $\psi(s)$  è un polinomio, denominato *polinomio minimo* di  $\mathbf{A}$ , dato da:

$$\psi(s) = \frac{\Delta(s)}{\text{m.c.d di tutti gli elementi di } (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^a}. \quad (3.3.10)$$

Il polinomio minimo ha gli stessi zeri del polinomio caratteristico ma con molteplicità inferiore a, al più, uguale:

$$\psi(s) = \prod_{i=1}^r (s - \lambda_i)^{m_i}, \quad (3.3.11)$$

dove  $m_i \in [1, M_i]$ .

Lo sviluppo in frazioni parziali della matrice  $\Phi(s)$  è dato da:

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} \frac{\mathbf{R}_{ik}}{(s - \lambda_i)^{k+1}}, \quad (3.3.12)$$

dove:

$$\mathbf{R}_{ik} = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} \frac{1}{(m_i - 1 - k)!} \frac{d^{m_i-1-k}}{ds^{m_i-1-k}} [(s - \lambda_i)^{m_i} \frac{\mathbf{Q}(s)}{\psi(s)}].$$

L'antitrasformata della funzione  $\Phi(s)$  risulta:

$$\Phi(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} \mathbf{R}_{ik} \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t}. \quad (3.3.13)$$

Postmoltiplicando per  $x_0$ , si ottiene la risposta libera nello stato data da:

$$\mathbf{x}_l(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=0}^{m_i-1} \mathbf{R}_{ik} \mathbf{x}_0 \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} . \quad (3.3.14)$$

Il generico termine:

$$\mathbf{x}_{li}(t) = \sum_{k=0}^{m_i-1} \mathbf{R}_{ik} \mathbf{x}_0 \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_i t} , \quad (3.3.15)$$

costituisce il modo associato all'autovalore  $\lambda_i$ . Conseguentemente, la risposta libera nello stato è data dalla sovrapposizione di  $r$  modi elementari di evoluzione del sistema.

### 3.3.3 Struttura delle matrici $\Phi(s)$ , $H(s)$ , $\Psi(s)$ , $W(s)$

Le matrici che compaiono nella rappresentazione esplicita del sistema nel dominio di  $s$  hanno tutte struttura razionale fratta. In particolare:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} && \text{è strettamente propria;} \\ H(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} && \text{è strettamente propria;} \\ \Psi(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} && \text{è strettamente propria;} \\ W(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} && \text{è } \begin{cases} \text{strettamente propria} & \text{per } \mathbf{D} = \mathbf{0} \\ \text{propria} & \text{per } \mathbf{D} \neq \mathbf{0} \end{cases} . \end{aligned}$$

Inoltre, si ha:

$$\Phi(s) = \begin{cases} \frac{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^a}{\Delta(s)} & \text{per autovalori distinti o multipli ma in assenza di fattori comuni} \\ \frac{\underline{Q}(s)}{\psi(s)} & \text{per autovalori multipli e in presenza di fattori comuni} \end{cases} .$$

Conseguentemente, denominando poli di una matrice di funzioni di  $s$  gli zeri del minimo denominatore comune di tutti gli elementi della matrice stessa, si ha che:

- i poli di  $\Phi(s)$  sono gli autovalori di  $\mathbf{A}$  con molteplicità algebrica o geometrica;
- i poli della matrice  $W(s)$  coincidono, in generale, con un sottoinsieme degli autovalori di  $\mathbf{A}$  a causa di cancellazioni che possono avvenire fra fattori comuni in tutti gli elementi della matrice stessa.

Risulta chiaro, quindi, che la matrice di trasferimento non contiene, in generale, tutte le informazioni sul sistema.

In proposito, nel caso di autovalori distinti, si dimostra che fra i poli della matrice  $W(s)$  non figurano gli autovalori di  $\mathbf{A}$  che corrispondono a modi inosservabili attraverso l'uscita o non eccitabili mediante impulsi in ingresso. Infatti, trasformando secondo Laplace la risposta forzata nell'uscita (2.4.16), si ha:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_f(s) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_j) \mathbf{C} \mathbf{v}_i \frac{1}{s - \lambda_i} U_j(s) + \sum_{j=1}^p \mathbf{d}_j U_j(t) = \\
&\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{C} \mathbf{v}_i}{s - \lambda_i} \left[ (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_1) \quad \dots \quad (\mathbf{r}_i, \mathbf{b}_p) \right] \mathbf{U}(s) + \mathbf{D} \mathbf{U}(s) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{C} \mathbf{v}_i)(\mathbf{r}_i^{*T} \mathbf{B})}{s - \lambda_i} + \mathbf{D} \right] \mathbf{U}(s)
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{W}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{(\mathbf{C} \mathbf{v}_i)(\mathbf{r}_i^{*T} \mathbf{B})}{s - \lambda_i} + \mathbf{D}, \tag{3.3.2}$$

Quindi, se  $\mathbf{C} \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$  (modo  $i$  inosservabile) o  $\mathbf{r}_i^{*T} \mathbf{B} = \mathbf{0}$  (modo  $i$  non eccitabile mediante impulsi in ingresso) l'autovalore  $\lambda_i$  non figura fra i poli di  $\mathbf{W}(s)$ .