

Cap. 8 Sistemi di controllo

Come già detto, in generale, un sistema è solo potenzialmente in grado di soddisfare gli obiettivi per i quali è stato costruito, e cioè di comportarsi nella maniera desiderata. Per conseguire tale obiettivo occorre esercitare sul sistema un complesso di azioni, dette *azioni di controllo* o, più semplicemente *controllo*.

Per dare una definizione precisa di controllo si ammetta che:

- a) il comportamento effettivo del sistema possa essere riassunto dall'andamento temporale di una o più grandezze d'uscita;
- b) l'informazione sul comportamento desiderato del sistema possa essere riassunta dall'andamento temporale di una o più grandezze, dette *grandezze di comando* o *grandezze di riferimento*, il cui valore sia, istante per istante, proporzionale al valore desiderato delle grandezze di uscita.

Forzare il sistema a comportarsi nel modo desiderato significa, allora, far sì che le grandezze d'uscita risultino proporzionali alle grandezze di comando entro prefissati margini di tolleranza, contrastando gli effetti dei disturbi e delle variazioni parametriche che agiscono sul sistema.

È possibile a questo punto fornire la seguente definizione di controllo.

Definizione 8.1 Si chiama controllo un insieme di azioni che consente di far variare nel modo voluto le grandezze di uscita di un sistema, alle quali sia associato un livello di potenza notevolmente superiore rispetto a quello delle grandezze di comando. ◁

Il controllo che si esercita senza l'intervento dell'uomo si dice *controllo automatico*. Un sistema di controllo automatico è un insieme di elementi fra loro interagenti, nei quali almeno una interazione rientra nella definizione di azione di controllo automatico.

Il sistema al quale si vuole imporre il comportamento desiderato viene denominato, come detto *sistema controllato*, le grandezze che esercitano l'azione di controllo su di esso vengono denominate *grandezze controllanti*, quelle di uscita vengono denominate *grandezze controllate*.

Il problema del controllo viene risolto associando al sistema controllato un opportuno *sistema controllante*, il cui compito è quello di sviluppare le azioni di controllo a partire dalle grandezze di riferimento ed, eventualmente, da altre grandezze.

8.1 Classificazione dei sistemi di controllo

Un primo criterio di classificazione dei sistemi di controllo è quello basato sulle modalità di controllo impiegate. Le modalità di controllo di base sono:

- il controllo a *catena aperta*;
- il controllo a *catena chiusa* o a *controreazione*.

Il controllo si dice a catena aperta se le azioni di controllo vengono esercitate a partire dalle grandezze di comando e dalle cause di errore, cioè dai disturbi e dalle variazioni parametriche, qualora questi possano essere misurati.

In proposito, con riferimento ai disturbi si osserva che alcuni tipi di disturbi possono essere direttamente misurati, mentre altri tipi possono solamente essere stimati indirettamente, cioè a partire dalle misure di altre grandezze accessibili per la misura. Le variazioni parametriche, invece, possono solamente essere stimate indirettamente.

Un sistema di controllo si dice a catena aperta se la modalità di controllo impiegata è quella a catena aperta. Lo schema strutturale di principio di un sistema di controllo a catena aperta è riportato in Fig. 8.1.1. Si noti che il dispositivo di controllo, usualmente realizzato mediante l'impiego di sistemi digitali basati su microprocessore, ha il compito di elaborare

segnali di controllo di adeguato andamento temporale. Gli organi di potenza vengono utilizzati per conferire a tali segnali il livello di potenza adeguato generando azioni di controllo in grado di guidare l'evoluzione del sistema controllato.

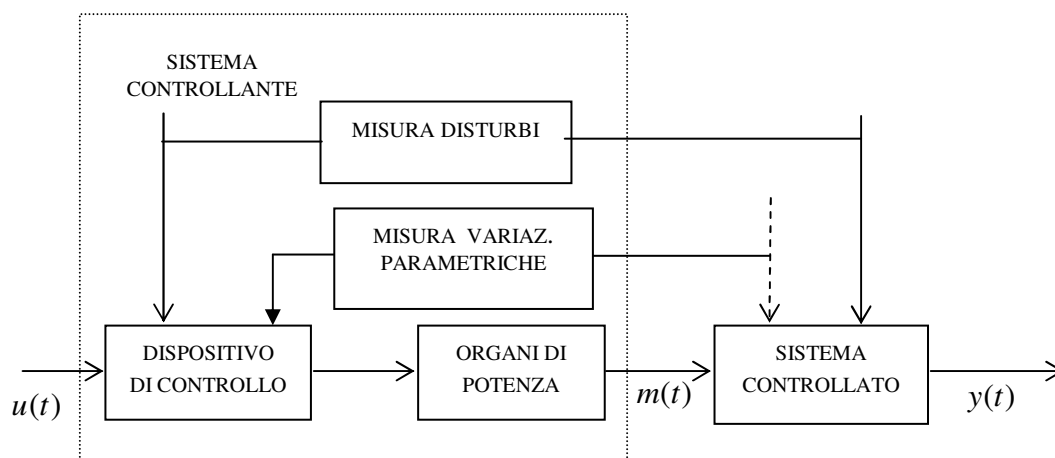


Fig. 8.1.1 Schema di principio di un sistema a catena aperta.

Il controllo si dice invece a catena chiusa, o a controreazione se le azioni di controllo vengono esercitate a partire dalla differenza tra le grandezze di riferimento e le misure delle grandezze controllate.

Un sistema di controllo si dice a catena chiusa se in esso vengono sviluppate azioni di controllo a catena chiusa. Lo schema strutturale di principio di un sistema di controllo a catena chiusa è riportato nella Fig. 8.1.2.

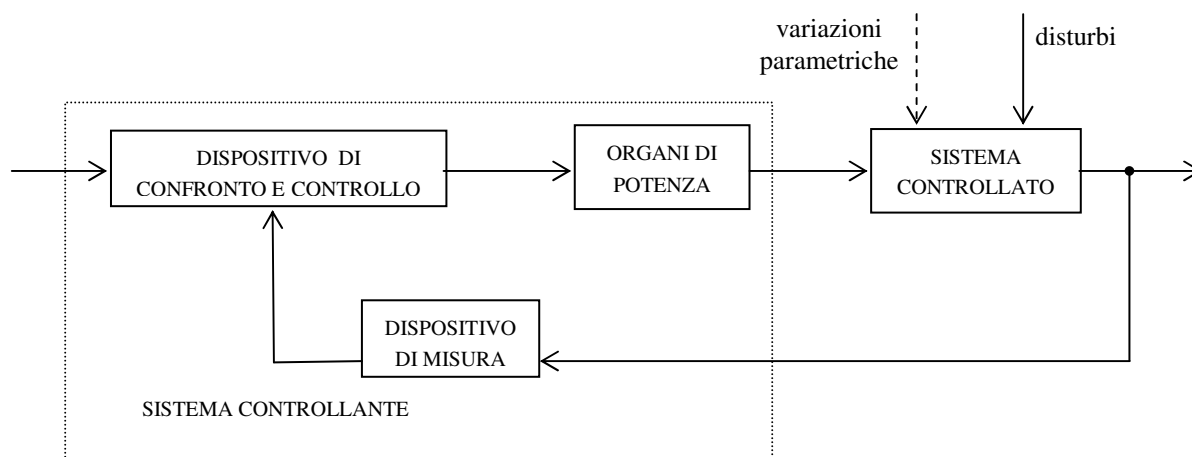


Fig. 8.1.2 Schema di principio di un sistema a catena chiusa.

L'esame degli schemi di controllo a catena aperta e chiusa, mostra che:

- lo schema a catena aperta genera le azioni di controllo a partire dalle cause di errore, disturbi e variazioni parametriche, mentre lo schema a catena chiusa genera le azioni di controllo a partire dagli effetti che le cause di errore hanno sull'uscita;
- se disturbi e variazioni parametriche potessero essere tutti misurati (anche indirettamente), i dispositivi di misura fossero istantanei e privi di errori, il dispositivo di controllo fosse in grado di elaborare i segnali di controllo in tempo reale e gli organi

di potenza fossero istantanei, lo schema a catena aperta potrebbe funzionare in assenza di errore sulle variabili di uscita; lo schema a catena chiusa, anche nelle succitate ipotesi ideali, comporterebbe la presenza di un errore finito che, a seconda del tipo di legge di controllo elaborata dal dispositivo di controllo, potrebbe o meno convergere a zero;

- lo schema a catena aperta, in presenza di disturbi o variazioni parametriche non previste, e quindi non misurate, non è in grado di modificare le azioni di controllo generate in assenza di tali addizionali cause di errore, mentre lo schema a catena chiusa è in grado di reagire ad esse poiché tali cause provocano effetti sulle grandezze di uscita che rilevate dal dispositivo di confronto e controllo, determinano una modifica delle azioni di controllo preesistenti;

Ne consegue che lo schema a catena chiusa è in grado di assicurare prestazioni migliori di un sistema di controllo a catena aperta. Ovviamente, possono essere realizzati schemi di controllo nei quali sono presenti entrambe le modalità di controllo.

Un secondo criterio di classificazione dei sistemi di controllo è quello basato sulle finalità che tale sistema persegue. In accordo a tale criterio, i sistemi di controllo si distinguono in:

- sistemi di regolazione;
- sistemi di asservimento.

In un sistema di regolazione le grandezze di riferimento sono costanti, e quindi la sua finalità è quella di mantenere costanti e pari al livello desiderato le grandezze di uscita contrastando gli effetti dei disturbi e delle variazioni parametriche. Un sistema di asservimento è invece caratterizzato dal fatto che le grandezze di comando sono generiche funzioni del tempo, e la sua finalità è quella di forzare le grandezze di uscita ad assumere un andamento proporzionale a quello delle grandezze di ingresso, entro prefissati margini di tolleranza, opponendosi anche in questo caso agli effetti dei disturbi e delle variazioni parametriche.

Un terzo criterio di classificazione è quello basato sulla natura fisica delle grandezze controllate. In accordo a tale criterio, i sistemi di controllo si distinguono in:

- sistemi di controllo cinetici;
- sistemi di controllo di processo.

Nei sistemi di controllo cinetici le grandezze controllate sono di natura meccanica (posizione, velocità, accelerazione), mentre nei sistemi di controllo di processo le grandezze controllate sono di natura non meccanica (temperature, livelli, portate, tensioni, frequenze).

I sistemi di asservimento di tipo cinetico vengono anche denominati servomeccanismi.

Nelle Figg. 8.1.3 e 8.1.4 vengono illustrati due possibili schemi di controllo, a catena aperta e a catena chiusa, il cui scopo è quello di mantenere costante il livello del liquido in un serbatoio.

Nel sistema di Fig. 8.1.3 viene, anzitutto, misurato il disturbo q_u . Tale informazione viene inviata al dispositivo di controllo che riceve anche quella relativa al livello desiderato. A partire da tali informazioni, il dispositivo di controllo elabora un segnale elettrico che viene amplificato in livello e in potenza, al fine di forzare un motore a corrente continua a trascinare in rotazione il rotore di una pompa volumetrica alla velocità idonea a immettere nel serbatoio liquido con una portata q_i idonea a contrastare gli effetti di q_u . E' facile rendersi conto che a causa di inevitabili errori di misura e di ritardi nel calcolo della legge di controllo, il livello

del liquido non si mantiene costante e pari a quello desiderato. Il serbatoio potrebbe, al limite, svuotarsi del tutto o riempirsi completamente.

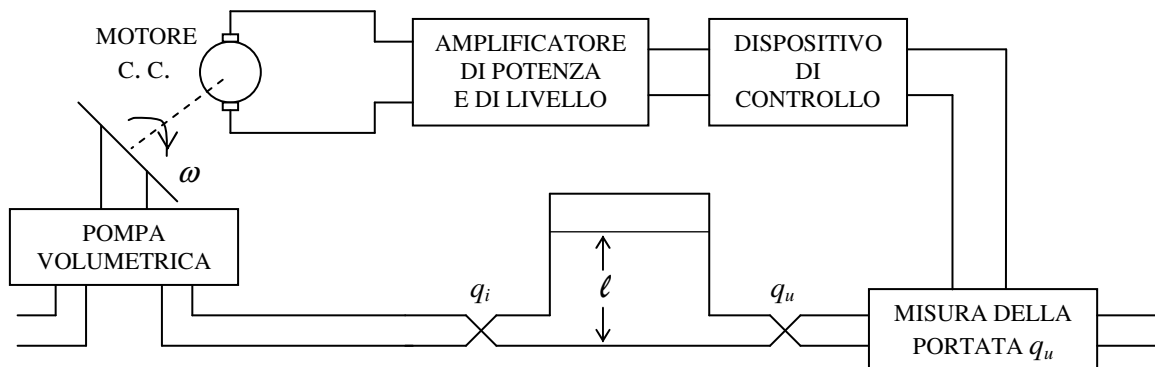


Fig. 8.1.3 Sistema di regolazione a catena aperta del livello del liquido in un serbatoio.

Nel sistema di Fig. 8.1.4 la grandezza $\ell(t)$ viene misurata tramite un galleggiante e trasformata in una grandezza di tipo elettrico, ad essa proporzionale, collegando il galleggiante stesso al cursore di un potenziometro a due cursori. L'altro cursore viene posizionato in modo da fornire una grandezza elettrica proporzionale al valore desiderato del livello del liquido. La differenza fra le differenze di potenziale fra i due cursori e la massa del potenziometro è, quindi, proporzionale all'errore di livello. A partire da tale grandezza proporzionale all'errore, il dispositivo di controllo elabora una legge di controllo che forza tale grandezza, e quindi l'errore di livello, a seguire un andamento temporale desiderato che tende a zero o a un valore inferiore a una soglia prefissata.

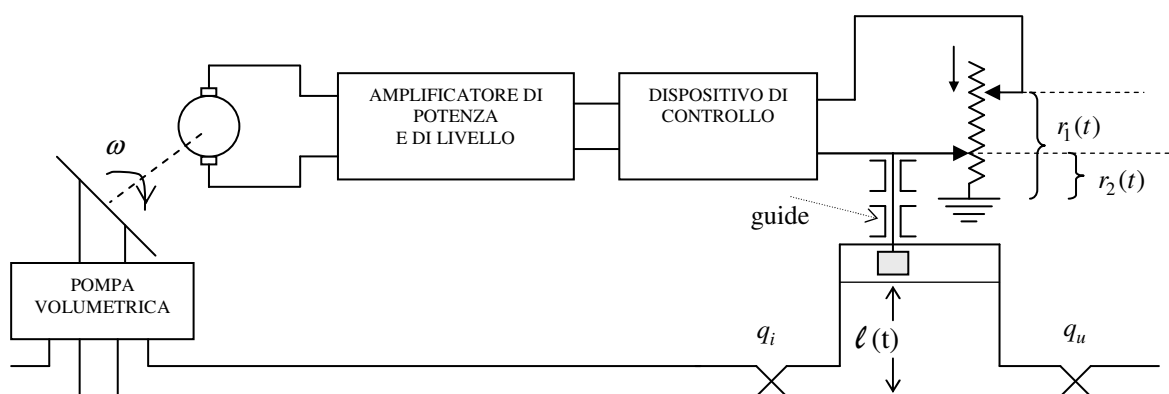


Fig. 8.1.4 – Sistema di controllo a catena chiusa.

8.2 Struttura dei sistemi di controllo a controreazione

Lo schema strutturale di un sistema di controllo a controreazione è illustrato nella Fig. 8.1.5, dove i blocchi e le grandezze mostrati hanno il significato che segue.

- u : grandezza di comando;
- G : generatore della grandezza di comando, ammesso che essa sia nota a priori;
- T' , T'' : trasduttori, cioè dispositivi che modificano la natura fisica dei segnali d'ingresso u e y , generando segnali r e y_c della stessa natura fisica, ma di natura fisica diversa da u e y , legati a queste ultime grandezze tramite una legge nota; le grandezze di uscita dei due trasduttori sono, generalmente, di natura elettrica per la semplicità

con cui tali segnali possono essere manipolati, e la notevole disponibilità di dispositivi in grado di manipolarli;

- r : segnale di riferimento in senso stretto;
- y_c : segnale di controreazione;
- u_d : segnale agente;
- m : grandezza controllante;
- C: controllore o dispositivo di controllo, che ha il compito di elaborare la legge di controllo in modo che la grandezza v_1 abbia un andamento temporale desiderato;
- A_ℓ : amplificatore elettrico di livello ($v_2 > v_1$), che agisce in modo che il guadagno della funzione di trasferimento che lega y a u_d sia sufficientemente elevato;
- A_p : amplificatore elettrico di potenza (v_3 ha un potenza maggiore di v_2);
- E: esecutore o attuatore, che fornisce in uscita una grandezza fisica m di natura idonea a poter pilotare il sistema controllato; poiché le grandezze di ingresso e di uscita di E hanno una potenza elevata, si può ritenere che E sia un trasduttore a livello di potenza di potenza;
- S.C.: sistema controllato.

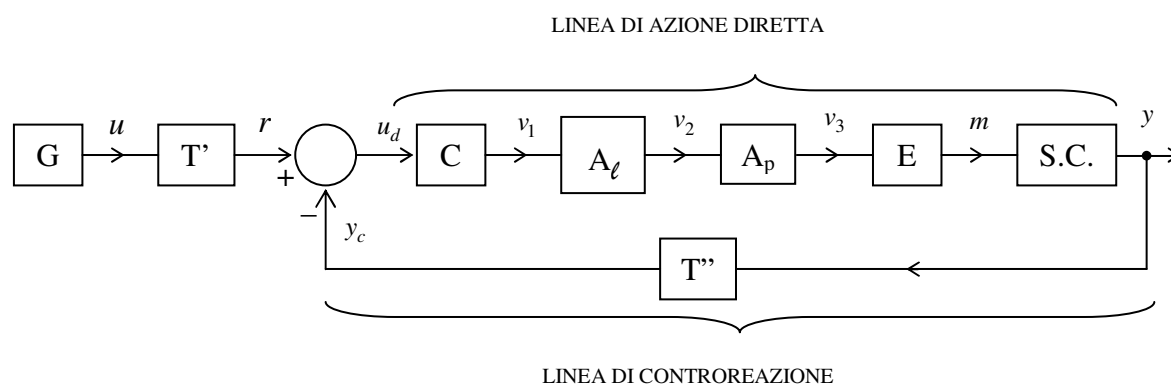


Fig. 8.1.5 Struttura dei sistemi di controllo a controreazione.

I blocchi da C a S.C. costituiscono la linea di azione diretta, il ramo su cui è presente T'' costituisce la linea di controreazione.

Il segnale agente u_d può, in generale, non essere proporzionale all'errore $e(t) = y_d(t) - y(t)$ dato dalla differenza fra l'uscita desiderata e quella effettiva. Tuttavia, in molti casi si preferisce utilizzare uno schema di controllo nel quale la legge di controllo viene elaborata a partire dall'errore o da una grandezza ad esso proporzionale.

Si supponga, ad esempio, che $u(t)$ rappresenti proprio l'andamento desiderato della grandezza di uscita $y_d(t)$, e che T' e T'' abbiano la stessa funzione di trasferimento costante e pari a h . In tal caso si ha:

$$\begin{aligned} r(t) &= hu(t), \\ y_c(t) &= hy(t), \\ u_d(t) &= r(t) - y_c(t) = h(y_d(t) - y(t)) = he(t) \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

Assumendo, invece, che:

$$y_d(t) = K_d u(t), \quad (8.1.2)$$

è ancora possibile realizzare un sistema di controllo basato sull'errore disponendo sulla linea di controreazione un blocco di trasferimento pari a $1/K_d$, come indicato nella Fig. 8.1.6.

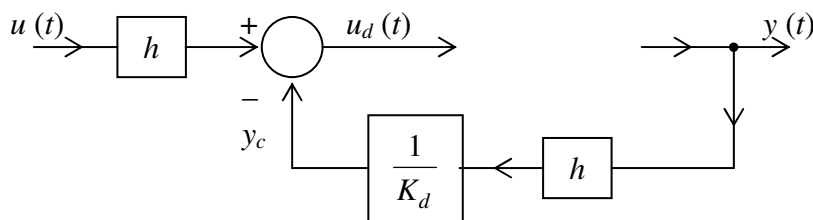


Fig. 8.1.6 Schema di controllo basato sull'errore.

8.3 Analisi dello schema funzionale a controreazione

Si ammetta, adesso, che associando a ciascun elemento dello schema di Fig. 8.1.6 il relativo modello matematico e utilizzando le relazioni di *interconnessione*, che esprimono il modo in cui i vari elementi sono interconnessi fra loro, sia possibile pervenire allo schema funzionale di Fig. 8.1.7.

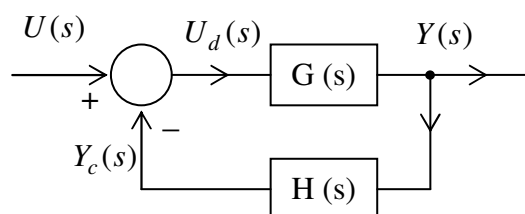


Fig. 8.1.7 Schema elementare a controreazione.

Come già detto in precedenza, allo schema di Fig. 8.1.7 è possibile associare la funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}. \quad (8.1.3)$$

Inoltre, al suddetto schema possono essere associate la funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ e la funzione differenza $D(s)$, date da:

$$F(s) = G(s)H(s), \quad (8.1.4)$$

$$D(s) = 1 + F(s) = 1 + G(s)H(s). \quad (8.1.5)$$

La funzione differenza gioca un ruolo fondamentale nello studio dei sistemi di controllo. Infatti, dalla (8.1.3) emerge che gli zeri della funzione differenza coincidono con i poli della $W(s)$. Inoltre, in certe condizioni, esiste una importante relazione tra la funzione differenza e il polinomio caratteristico della matrice dinamica, A_{cl} , del modello con lo stato del sistema a catena chiusa. Al fine di stabilire tale relazione, si consideri il sistema a controreazione di Fig. 8.1.8, dove i due sottosistemi S_d (della linea diretta) e S_c (della linea di controreazione) sono descritti dai seguenti modelli con lo stato:

$$S_d : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d u_d \\ y_d = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d \end{cases} \quad (8.1.6)$$

$$S_c : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c u_c \\ y_c = \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c + d_c u_c \end{cases} \quad (8.1.7)$$

con $\mathbf{x}_d \in C^{n_d}$, $\mathbf{x}_c \in C^{n_c}$. Le relazioni di interconnessione sono date da:

$$\begin{cases} u_d = u - y_c = u - \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c - d_c u_c = u - \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c - d_c \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d \\ u_c = y_d = \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d \end{cases} \quad (8.1.8)$$

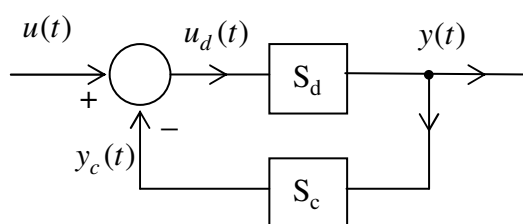


Fig. 8.1.8 Schema a controreazione costituito dall'interconnessione di S_d e S_c .

Dalle relazioni (8.1.6)- (8.1.8) si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d (u - \mathbf{c}_c^T \mathbf{x}_c - d_c \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d), \\ \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{b}_c \mathbf{c}_d^T \mathbf{x}_d, \end{aligned}$$

che in forma matriciale diventano:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d d_c \mathbf{c}_d^T & -\mathbf{b}_d \mathbf{c}_c^T \\ \mathbf{b}_c \mathbf{c}_d^T & \mathbf{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} u. \quad (8.1.9)$$

Assumendo come stato dell'intero sistema a controreazione l'insieme degli stati dei sottosistemi S_d e S_c , $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_d^T \quad \mathbf{x}_c^T]^T$, il modello a catena chiusa risulta:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{cl} \mathbf{x} + \mathbf{b}_{cl} u, \quad (8.1.10)$$

$$y = \mathbf{c}_{cl}^T \mathbf{x}, \quad (8.1.11)$$

dove:

$$\mathbf{A}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d - \mathbf{b}_d d_c \mathbf{c}_d^T & -\mathbf{b}_d \mathbf{c}_c^T \\ \mathbf{b}_c \mathbf{c}_d^T & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_{cl} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_d \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_{cl}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_d^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}.$$

Le funzioni di trasferimento dei sistemi S_d e S_c sono date da:

$$G(s) = \mathbf{c}_d^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{b}_d = \frac{\phi_d(s)}{\Delta_d(s)}, \quad (8.1.12)$$

$$H(s) = \mathbf{c}_c^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{b}_c + d_c = \frac{\phi_c(s)}{\Delta_c(s)}, \quad (8.1.13)$$

dove $\Delta_d(s)$ e $\Delta_c(s)$ sono, rispettivamente, i polinomi caratteristici delle matrici \mathbf{A}_d e \mathbf{A}_c . Si dimostra il risultato che segue.

Teorema 8.1.1 Il polinomio caratteristico della matrice \mathbf{A}_{cl} , $\Delta_{cl}(s)$, risulta:

$$\Delta_{cl}(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{cl}) = \Delta_d(s)\Delta_c(s) \left(1 + \frac{\phi_d(s)}{\Delta_d(s)} \frac{\phi_c(s)}{\Delta_c(s)} \right) = \Delta_d(s)\Delta_c(s) + \phi_d(s)\phi_c(s), \quad (8.1.14)$$

◁

La funzione differenza del sistema di Fig. 8.1.8, è data da:

$$D(s) = 1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{\phi_d(s)}{\Delta_d(s)} \frac{\phi_c(s)}{\Delta_c(s)}. \quad (8.1.15)$$

Il confronto fra le (8.1.14) e (8.1.15) permette di dimostrare la seguente Asserzione.

Asserzione 8.1.1 Assumendo che non esistano fenomeni di cancellazione nella funzione di trasferimento a catena aperta $F(s) = G(s)H(s)$, gli zeri della funzione differenza coincidono con gli zeri di $\Delta_{cl}(s)$, cioè con gli autovalori della matrice dinamica del modello a catena chiusa.

◁

Osservazione 8.1.1 I fenomeni di cancellazione non devono essere presenti né nella $G(s)$, né nella $H(s)$, né nel prodotto $G(s)H(s)$; conseguentemente, \mathbf{S}_d e \mathbf{S}_c devono essere completamente controllabili e completamente osservabili e, inoltre, non devono esistere zeri di $G(s)$ comuni a poli di $H(s)$, né poli di $G(s)$ comuni a zeri di $H(s)$.

◁

8.4 Confronto fra sistemi a catena aperta e a catena chiusa

Si consideri il sistema a catena aperta illustrato nella Fig. 8.1.9, dove $G_c(s)$ e $G_p(s)$ sono, rispettivamente, le funzioni di trasferimento del dispositivo di controllo e del sistema controllato, $Z(s)$ è la trasformata di Laplace di un disturbo $z(t)$, non misurabile, che agisce all'uscita del sistema controllato e $M(s)$ è la trasformata di Laplace della grandezza controllante. Si noti che l'uscita del blocco $G_p(s)$ non è accessibile per la misura; infatti, l'insieme dei blocchi da $M(s)$ a $Y(s)$, compreso il disturbo $Z(s)$, costituiscono tutti una schematizzazione del sistema controllato.

Si consideri, inoltre, il sistema a catena chiusa illustrato nella Fig. 8.1.10, dove $N(s)$ rappresenta la trasformata di Laplace di un segnale equivalente di rumore introdotto dal dispositivo di misura della grandezza di uscita, $H(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento del dispositivo di misura, mentre le altre grandezze e/o funzioni hanno lo stesso significato illustrato in precedenza.

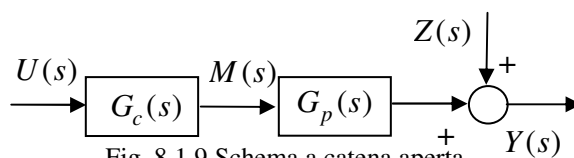


Fig. 8.1.9 Schema a catena aperta.

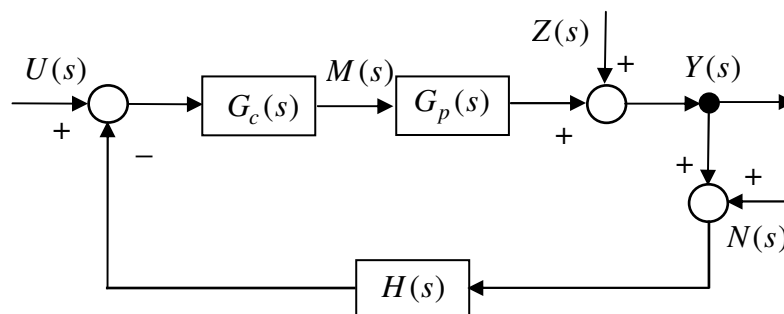


Fig. 8.1.10 Schema a catena chiusa

Con riferimento ai sistemi di Figg. 8.1.9 e 8.1.10, si definisca l'errore $e(t)$ come segue:

$$e(t) = y_d(t) - y(t) = K_d u(t) - y(t), \quad (8.1.16)$$

Sistema a catena aperta

Nel dominio di s , applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, si ha:

$$Y(s) = Y_z(s) + Y_u(s), \quad (8.1.17)$$

dove:

$$Y_z(s) = Z(s), \quad Y_u(s) = W(s)U(s).$$

L'errore nel dominio di s , per la (8.1.16), è dato da:

$$E(s) = K_d U(s) - Y(s) = [K_d - W(s)]U(s) - Z(s) = E_u(s) + E_z(s), \quad (8.1.18)$$

dove $W(s) = G_c(s)G_p(s)$ è la funzione di trasferimento ingresso-uscita, ed $E_u(s)$ ed $E_z(s)$ sono le componenti dell'errore dovute all'ingresso e al disturbo, rispettivamente, date da:

$$E_u(s) = [K_d - W(s)]U(s), \quad (8.1.19)$$

$$E_z(s) = -Z(s). \quad (8.1.20)$$

L'errore prodotto dalla grandezza di comando è dovuto all'imperfetto legame ingresso-uscita, al fatto cioè che la funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ è diversa da K_d . Infatti, usualmente, $G_c(s)G_p(s)$ risulta strettamente propria e, quindi, $\lim_{s \rightarrow \infty} W(s) = 0$.

Conviene osservare che, dal punto di vista pratico, il fatto di non potere realizzare il sistema a catena chiusa in modo tale che $W(s) = K_d$ è vantaggioso poiché il segnale $u(t)$,

come detto, viene generato da un dispositivo reale che introduce segnali di rumore che si sovrappongono al segnale utile che si desidera generare. Conseguentemente, esistono le seguenti due esigenze contrastanti:

1. quella di riprodurre fedelmente i segnali di comando utili;
2. quella di cancellare gli effetti sull'uscita del rumore sovrapposto al segnale di comando utile.

Al fine di soddisfare con un certo margine di tolleranza le due esigenze contrapposte, conviene scegliere la $W(s)$ in modo tale che la corrispondente risposta in frequenza $W(j\omega)$ soddisfi la condizione:

$$W(j\omega) \cong K_d, \quad \forall \omega \in \Omega_u, \quad (8.1.21)$$

essendo Ω_u la regione della frequenza in cui si suppone confinato il contenuto armonico del segnale di comando utile, e che il modulo della risposta in frequenza sia ridotto a zero il più rapidamente possibile all'esterno di tale regione ($\omega \notin \Omega_u$).

In tale caso, infatti, denotando con $\bar{u}(t) = u(t) + n_u(t)$ l'effettivo segnale di comando generato, ivi incluso il segnale di rumore $n_u(t)$ ad esso sovrapposto, l'effettiva uscita $\bar{y}_u(t)$, nel dominio di ω , è data da:

$$\bar{Y}_u(j\omega) = W(j\omega)U(j\omega) + W(j\omega)N_u(j\omega),$$

la quale mostra che del rumore sovrapposto al segnale di comando viene riprodotta all'uscita solamente quella parte che ha contenuto armonico all'interno della regione Ω_u .

L'esame della (8.1.20) mette in luce che il disturbo $z(t)$ agisce direttamente sull'errore senza alcuna possibilità di contrastarlo a meno che non si proceda a una sua misura.

Infine, se si manifestano variazioni nei parametri della funzione $G_p(s)$, il comportamento del sistema potrebbe deteriorarsi poiché la condizione $W(j\omega) = G_c(j\omega)G_p(j\omega) \cong K_d$ potrebbe non risultare più soddisfatta.

Sistema a catena chiusa

Per il sistema a catena chiusa, si ha:

$$Y(s) = Z(s) + G_c(s)G_p(s) \left[U(s) - H(s)(Y(s) + N(s)) \right],$$

da cui si ottiene:

$$Y(s) = \frac{1}{1 + F(s)} \left[Z(s) + G_c(s)G_p(s)U(s) - F(s)N(s) \right], \quad (8.1.22)$$

dove:

$$F(s) = G_c(s)G_p(s)H(s). \quad (8.1.23)$$

Ne consegue che, in accordo con la (8.1.16), l'errore $E(s)$ risulta:

$$E(s) = [K_d - W(s)]U(s) - W_z(s)Z(s) + W_n(s)N(s) = E_u(s) + E_z(s) + E_n(s), \quad (8.1.24)$$

dove le funzioni di trasferimento ingresso-uscita, $W(s)$, disturbo-uscita, $W_z(s)$ e rumore-uscita, $W_n(s)$, sono date da:

$$W(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + F(s)}, \quad (8.1.25)$$

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + F(s)}, \quad (8.1.26)$$

$$W_n(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}, \quad (8.1.27)$$

e le tre componenti l'errore complessivo sono date da:

$$E_u(s) = [K_d - W(s)]U(s), \quad (8.1.28)$$

$$E_z(s) = -W_z(s)Z(s), \quad (8.1.29)$$

$$E_n(s) = W_n(s)N(s). \quad (8.1.30)$$

L'esame della (8.1.24) mette che in un sistema a catena chiusa l'errore complessivo è dato dalla sovrapposizione di tre componenti, dovute alla grandezza di comando, al disturbo e al rumore di misura della grandezza di uscita. Conviene esaminare in dettaglio il contributo delle tre succitate componenti.

Errore dovuto alla grandezza di comando

Dall'analisi svolta per i sistemi a catena aperta, è emerso che conviene scegliere la $W(s)$ in modo tale che la corrispondente risposta in frequenza $W(j\omega)$ soddisfi la condizione:

$$W(j\omega) \cong K_d, \quad \forall \omega \in \Omega_u, \quad (8.1.31)$$

essendo Ω_u la regione della frequenza in cui è confinato il contenuto armonico del segnale di comando utile, e che il modulo della risposta in frequenza sia ridotto a zero il più rapidamente possibile all'esterno di tale regione ($\omega \notin \Omega_u$).

Dall'esame della funzione di trasferimento $W(s)$ (cfr. (8.1.25)) emerge che la (8.1.31) può essere ottenuta progettando $G_c(s)$ e $H(s)$ in modo tale che:

$$|F(j\omega)| = |G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)| \gg 1, \quad \forall \omega \in \Omega_u. \quad (8.1.32)$$

e scegliere $H(j\omega)$ in modo tale che risulti:

$$H(j\omega) \cong \frac{1}{K_d}, \quad \forall \omega \in \Omega_u. \quad (8.1.33)$$

Infatti, in tale caso, è possibile trascurare 1 rispetto a $F(j\omega)$ nella espressione della $W(j\omega)$ che, pertanto, diviene:

$$W(j\omega) \cong \frac{G_c(j\omega)G_p(j\omega)}{G_c(j\omega)G_p(j\omega)H(j\omega)} = \frac{1}{H(j\omega)}, \quad \forall \omega \in \Omega_u. \quad (8.1.34)$$

Errore dovuto al disturbo

Assumendo $|F(j\omega)| \gg 1$, $\forall \omega \in \Omega_u$, la funzione di trasferimento disturbo-uscita soddisfa la condizione $|W_z(j\omega)| \ll 1$, $\forall \omega \in \Omega_u$ e, di conseguenza, le armoniche del disturbo all'interno della banda di frequenza utile Ω_u vengono fortemente attenuate.

Tuttavia, conviene osservare che, usualmente, il sistema a retroazione è strettamente proprio a catena aperta, il che implica che $\lim_{\omega \rightarrow \infty} F(j\omega) = 0$. Ne consegue che $\lim_{\omega \rightarrow \infty} W_z(j\omega) = 1$, il che implica che eventuali armoniche del disturbo al di sopra di una certa frequenza si ripercuotono sull'uscita quasi per intero.

Le precedenti considerazioni mostrano che il sistema a controreazione di Fig. 8.1.10 è in grado di riprodurre i segnali di comando, attenuare gli effetti del rumore ad essi sovrapposto e attenuare anche gli effetti di quei disturbi che hanno lo stesso contenuto armonico del segnale di comando.

Nell'ipotesi che il disturbo contenga armoniche a frequenza maggiore della massima frequenza presente nel segnale utile e sufficientemente elevate, il sistema di Fig. 8.1.10 diviene inefficace per contrastare gli effetti del disturbo stesso. Se si desidera contrastare gli effetti del disturbo occorre, in tale caso, utilizzare uno schema a controreazione a due gradi di libertà, come quello illustrato nella Fig. 8.1.11.

Con riferimento a tale schema, si ha che le funzioni $W_z(s)$ e $W_n(s)$ rimangono invariate; quindi, $E_z(s)$ ed $E_n(s)$ rimangono invariate, mentre l'errore $E_u(s)$ è dato da:

$$E_u(s) = [K_d - W(s)G_u(s)]U(s), \quad (8.1.35)$$

dove $W(s)$ ha ancora l'espressione 8.1.25.

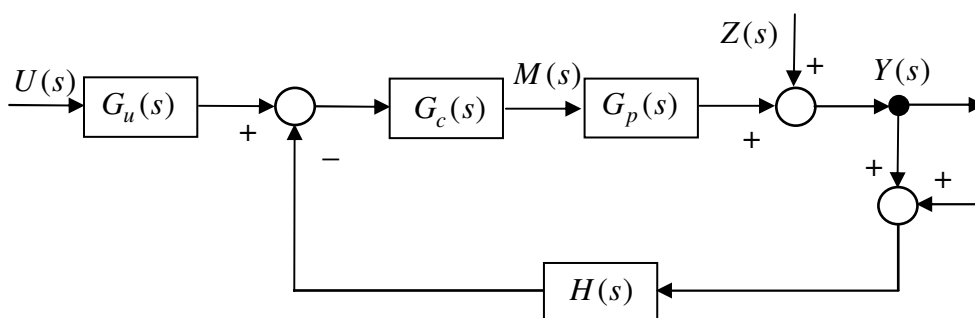


Fig. 8.1.11 Schema a catena chiusa a due gradi di libertà.

Tali considerazioni mostrano che lo schema di Fig. 8.1.11 è in grado di contrastare gli effetti degli errori dovuti al disturbo e al segnale di comando anche se tali grandezze hanno contenuti armonici in bande di frequenza differenti. Infatti, per contrastare gli effetti del disturbo $z(t)$ si sceglie opportunamente la funzione $F(s) = G_c(s)G_p(s)H(s)$, mentre per contrastare quelli dovuti al segnale di comando basta scegliere convenientemente la funzione $G_u(s)$.

Errore dovuto al rumore $n(t)$

L'esame della (8.1.26) mostra che nella banda di frequenze Ω_u , si ha:

$$W_n(j\omega) \cong 1,$$

mentre al di fuori di Ω_u e al crescere di ω il modulo di tale $W_n(j\omega)$ diminuisce e si ha:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |W_n(j\omega)| = 0.$$

Ne consegue che il sistema a controreazione è sensibile alle armoniche del rumore di misura che ricadono nel campo di frequenze Ω_u , mentre attenua le armoniche ad alta frequenza. Ciò costituisce un vantaggio poiché, usualmente, il rumore di misura ha un contenuto armonico confinato alle alte frequenze.

Effetti delle variazioni parametriche

L'esame della (8.1.31) mostra che nella banda di frequenze Ω_u la funzione di trasferimento ingresso-uscita coincide praticamente con l'inverso della funzione di trasferimento della linea di controreazione. Ciò significa che la controreazione attenua notevolmente gli effetti delle variazioni parametriche che si manifestano nella funzione di trasferimento della linea di azione diretta, mentre non ha praticamente alcun effetto sulle variazioni parametriche che si manifestano nella funzione di trasferimento della linea di controreazione. Ne consegue che gli elementi della linea di azione diretta possono essere progettati con tolleranze maggiori di quelli della linea di controreazione.

8.5 Analisi dello schema a retroazione per $H(s) = 1$

Nel caso di $H(s) = 1$, le (8.1.22)-(8.1.27) diventano:

$$F(s) = G_c(s)G_p(s). \quad (8.1.36)$$

$$W(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}, \quad (8.1.37)$$

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + F(s)}, \quad (8.1.38)$$

$$W_n(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}, \quad (8.1.39)$$

mentre l'errore, per $K_d = 1$, diviene:

$$E(s) = S(s)(U(s) - Z(s)) + C(s)N(s), \quad (8.1.40)$$

dove:

$$S(s) = \frac{1}{1 + F(s)}, \quad (8.1.41)$$

$$C(s) = \frac{F(s)}{1 + F(s)}. \quad (8.1.42)$$

Le funzioni $S(s)$ e $C(s)$ vengono, rispettivamente, denominate funzione di sensibilità e funzione di sensibilità complementare. Com'è facile verificare, le due funzioni sono legate fra loro dalla relazione:

$$S(s) + C(s) = 1. \quad (8.1.43)$$

Naturalmente, in tale caso, le considerazioni svolte nel paragrafo precedente sono ancora più evidenti.

8.6 Impostazione dello studio dei sistemi di controllo

Nell'ambito della teoria classica, lo studio dei sistemi di controllo viene effettuato in accordo ai criteri della *soluzione parziale* e del *legame diretto* fra il comportamento dell'intero sistema e quello delle singole parti di cui è costituito.

Il criterio della soluzione parziale consiste nell'isolare e analizzare separatamente i vari aspetti del comportamento del sistema; come già osservato in precedenza, sono aspetti caratteristici del comportamento di un sistema la stabilità, il comportamento in regime permanente e il comportamento transitorio dal doppio punto di vista della prontezza di risposta e della precisione dinamica.

I segnali di comando e i disturbi che si considerano nella valutazione del comportamento di un sistema sono i segnali canonici, l'impulso di Dirac e i suoi integrali successivi o i segnali sinusoidali di frequenza opportuna.

Il criterio del legame diretto consiste nella individuazione di metodi di studio che permettono di ottenere informazioni sull'intero sistema a partire da quelle sulle singole parti di cui esso è costituito.

Cap. 9 Stabilità dei sistemi di controllo a controreazione. Criterio di Nyquist

Lo studio della stabilità dei sistemi di controllo a controreazione può essere effettuato ricorrendo ai criteri algebrici di stabilità o a criteri basati sulla considerazione di funzioni associate alle singole parti di cui è costituito il sistema. Al primo gruppo appartiene il già noto criterio di Routh, mentre al secondo gruppo appartiene il criterio di Nyquist che verrà illustrato nel presente capitolo.

L'inconveniente principale dei criteri algebrici si manifesta quando si vuole impiegarli per risolvere un problema di sintesi. In tal caso, infatti, occorre determinare i parametri liberi del sistema controllante in modo tale che il sistema sia stabile. Utilizzando il criterio di Routh, la soluzione del problema implica quella del seguente sistema di disequazioni non lineari:

$$r_{n,1} > 0, r_{n-1,1} > 0, \dots, r_{0,1} > 0.$$

9.1 Criterio di Nyquist

Si consideri il sistema a controreazione e a ciclo unico riportato nella Fig. 8.1.7, che si riporta di seguito per comodità, e si ammetta che:

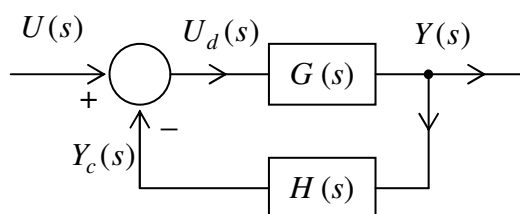


Fig. 9.1.1 Schema elementare a controreazione.

1. gli zeri della funzione differenza coincidano con gli autovalori della matrice dinamica del sistema a catena chiusa;
2. la funzione di trasferimento a catena aperta $F(s) = G(s)H(s)$ sia propria o strettamente propria;

Osservazione 9.1.1 - L'ipotesi 1 permette di valutare la stabilità interna asintotica del sistema di Fig. 9.1.1 a partire dalla dislocazione degli zeri della funzione differenza $D(s) = 1 + F(s) = 1 + G(s)H(s)$; l'ipotesi 2 assicura che quest'ultima funzione sia propria e quindi della forma:

$$D(s) = K_D \frac{\prod_{i=1}^n (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}. \quad (9.1.1)$$

Per lo studio della stabilità interna asintotica occorre e basta verificare che gli zeri della funzione differenza $D(s)$ abbiano tutti parte reale negativa, in quanto essi, come detto (cfr. ipotesi 1), coincidono con quelli del polinomio caratteristico relativo al sistema a retroazione. Tale verifica può essere effettuata mediante il criterio di Nyquist che si basa sul seguente *principio dell'argomento*.

Principio dell'argomento Nella ipotesi che la funzione differenza non abbia zeri e/o poli sull'asse immaginario, la variazione di fase $\Delta\xi_{D,\infty}$ della funzione $D(j\omega)$ quando s descrive l'asse immaginario da $-j\infty$ a $j\infty$, valutata positivamente in senso antiorario, è uguale a 2π volte la differenza fra il numero di poli, P , e il numero di zeri, Z , a parte reale positiva della funzione differenza $D(s)$. In simboli, si ha:

$$\Delta\xi_{D,\infty} = 2\pi(P - Z). \quad (9.1.2)$$

Prova. Al fine di dimostrare il principio dell'argomento, si consideri la Fig. 9.1.2, dove i fattori $j\omega - z_i$ e $j\omega - p_i$ vengono interpretati come vettori che hanno origine nei poli o negli zeri ed estremo nel punto $j\omega$. Poiché si ha (cfr. (9.1.1)):

$$\xi_D(j\omega) = \sum_{i=1}^n [\psi_i(\omega) - \phi_i(\omega)], \quad (9.1.3)$$

ne consegue che:

$$\Delta\xi_{D,\infty} = \sum_{i=1}^n [\Delta\psi_{i,\infty} - \Delta\phi_{i,\infty}], \quad (9.1.4)$$

dove $\Delta\psi_{i,\infty}$ e $\Delta\phi_{i,\infty}$ sono, rispettivamente, le variazioni di fase dei vettori $j\omega - z_i$ e $j\omega - p_i$ quando s descrive l'asse immaginario da $-j\infty$ a $j\infty$, valutate positivamente in senso antiorario. L'esame della Fig. 9.1.2 mostra che:

$$\Delta\psi_{i,\infty} \ (\Delta\phi_{i,\infty}) = \begin{cases} \pi & \text{per poli e zeri a parte reale negativa} \\ -\pi & \text{per poli e zeri a parte reale positiva} \end{cases}$$

Assumendo quindi che $D(s)$ abbia P poli e Z zeri a parte reale positiva, si ha:

$$\Delta\xi_{D,\infty} = (n - Z)\pi - Z\pi - [(n - P)\pi - P\pi] = 2\pi(P - Z). \quad (9.1.5)$$

◁

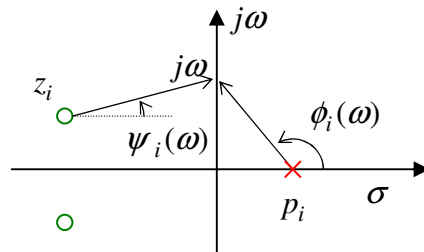


Fig. 9.1.2 Interpretazione dei fattori $j\omega - z_i$ e $j\omega - p_i$.

Indicando con T il numero di giri che il vettore rappresentativo della funzione $D(j\omega)$ compie intorno all'origine del piano di Nyquist della $D(j\omega)$, si ha:

$$\Delta\xi_{D,\infty} = 2\pi T, \quad (9.1.6)$$

e quindi risulta:

$$T = P - Z. \quad (9.1.7)$$

Osservazione 9.1.2 Si noti, adesso, che P è noto poiché i poli della $D(s)$ coincidono con quelli della $F(s)$. Ne consegue che se si riesce a calcolare T è possibile calcolare Z con la (9.1.7) e quindi valutare la stabilità interna asintotica del sistema a controreazione di Fig. 9.1.1.

Osservazione 9.1.3 Avendo escluso che la funzione $D(s)$ abbia zeri sull'asse immaginario, per la stabilità del sistema a controreazione occorre e basta che risulti $Z = 0$. Di conseguenza, la condizione necessaria e sufficiente di stabilità è $T = P$.

Osservazione 9.1.4 Il calcolo di T può essere effettuato a partire dal diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta $F(j\omega)$. Con riferimento alla Fig. 9.1.3, interpretando 1 come un vettore che ha origine nel punto di coordinate $(-1, j0)$, denominato punto critico, ed estremità nell'origine del piano di Nyquist della $F(j\omega)$, la somma vettoriale di tale vettore e del vettore rappresentativo della $F(j\omega)$, vettore \overline{OQ} , fornisce proprio il vettore rappresentativo della $D(j\omega)$, vettore che ha origine nel punto critico ed estremità nel punto Q. Pertanto, il numero di giri che il vettore rappresentativo di $D(j\omega)$ compie intorno all'origine del piano di Nyquist di $D(j\omega)$ è pari al numero di giri che il vettore rappresentativo di $D(j\omega)$ compie intorno al punto critico del piano della $F(j\omega)$.

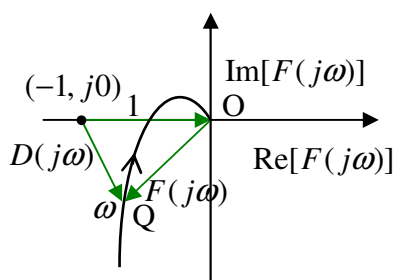


Fig. 9.1.3 Determinazione del vettore rappresentativo di $D(j\omega)$ sul piano della $F(j\omega)$.

Le osservazioni 9.1.2, 9.1.3 e 9.1.4 permettono di enunciare il seguente *Criterio di Nyquist generalizzato*.

Criterio di Nyquist generalizzato. Sia dato un sistema lineare e stazionario, a controreazione, a ciclo unico, tale che la funzione di trasferimento a catena aperta sia propria o strettamente propria, e priva di fattori comuni a numeratore e a denominatore. Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema sia asintoticamente stabile internamente è che il numero di giri T che il vettore rappresentativo della funzione $D(j\omega)$ compie attorno al punto critico del piano di Nyquist della $F(j\omega)$, valutato positivamente in senso antiorario e per ω variabile da $-\infty$ a $+\infty$, sia pari al numero P di poli a parte reale positiva della funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$.

Osservazione 9.1.5 A partire dalla espressione (8.1.3) della funzione di trasferimento ingresso-uscita $W(s)$ del sistema a controreazione di Fig. 9.1.1, si rileva che gli zeri della funzione differenza sono certamente i poli della $W(s)$. Ne consegue che il criterio di Nyquist

permette, in generale, di effettuare lo studio della stabilità esterna nello stato zero. L'analisi precedente mette comunque in luce che è anche possibile studiare la stabilità interna asintotica purché sia possibile accertare la completa controllabilità e la completa osservabilità dei sottosistemi sulla linea di azione diretta e su quella di controreazione.

9.2 Casi critici

I casi critici del criterio di Nyquist hanno origine dalla presenza di zeri o poli della funzione differenza sull'asse immaginario del piano complesso.

Zeri sull'asse immaginario

La presenza di zeri sull'asse immaginario viene immediatamente messa in evidenza dal fatto che il diagramma polare della $F(j\omega)$ passa per il punto critico. Infatti, ammesso che $D(s)$ abbia uno zero nel punto $j\tilde{\omega}$, si ha:

$$D(j\tilde{\omega}) = 1 + F(j\tilde{\omega}) = 0, \quad (9.2.1)$$

da cui risulta $F(j\tilde{\omega}) = -1$.

In tale caso, si può affermare che il sistema non è asintoticamente stabile internamente né stabile esternamente nello stato zero.

Poli sull'asse immaginario

Il problema connesso con la presenza di poli sull'asse immaginario nasce per il fatto che quando il punto s passa per uno di tali poli, ad es. \tilde{p}_i , si ha una brusca variazione di fase del vettore corrispondente $j\omega - \tilde{p}_i$ il cui segno è indeterminato; inoltre, il modulo della funzione $F(j\omega)$, e quindi quello della $D(j\omega)$, tende a ∞ .

Al fine di superare tale problema, si deforma l'asse immaginario mediante un percorso semicircolare di raggio infinitesimo e centrato nel polo immaginario che lasci alla propria sinistra o alla propria destra il polo stesso (cfr. Fig. 9.1.4 per il caso di un polo nell'origine).

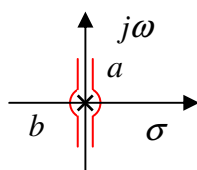


Fig. 9.2.1 Deformazione dell'asse immaginario in prossimità di un polo nell'origine.

Come già osservato, quando s attraversa il polo $j\tilde{\omega}$ il modulo tende a ∞ e il diagramma polare si spezza in due rami, uno dei quali termina per $\omega = \tilde{\omega}^-$ mentre l'altro inizia da $\omega = \tilde{\omega}^+$. Tali rami possono essere raccordati osservando che, quando s descrive uno dei due percorsi semicircolari (a o b), l'estremo del vettore rappresentativo della funzione $F(j\omega)$ descrive tante semicirconferenze di raggio infinitamente grande quante ne indica la molteplicità del polo, in verso orario se si sceglie il percorso a o in verso antiorario se si sceglie il percorso b .

Esempio 9.1.1

Si supponga che la funzione $F(s)$ abbia la distribuzione poli e zeri mostrata in Fig. 9.1.5, cui corrisponde la seguente espressione analitica nella variabile ω :

$$F(j\omega) = \frac{K_F}{j\omega \left(j\omega + \frac{1}{T_1} \right) \left(j\omega + \frac{1}{T_2} \right)} \quad (9.2.2)$$

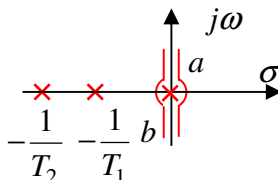


Fig. 9.2.2 distribuzione poli-zeri di una funzione $F(s)$.

Seguendo le regole per il tracciamento del diagramma polare, si ottiene il diagramma di Fig. 9.2.3 per $\omega \in [0^+, +\infty]$ e per $\omega \in [-\infty, 0^-]$. I due tratti del diagramma polare vengono raccordati con la semicirconferenza a di raggio infinito se si sceglie il percorso a o con quella b se si sceglie il percorso b .

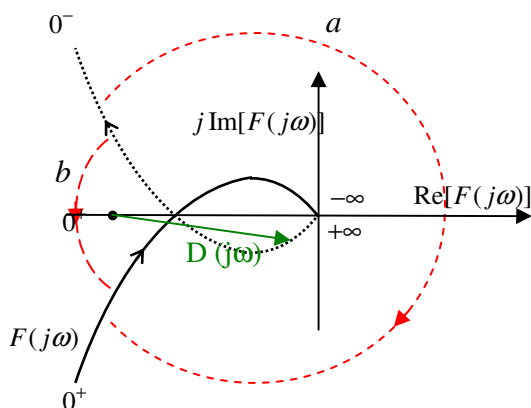


Fig. 9.2.3 Diagramma completo per la valutazione della stabilità. Punto critico a sinistra dell'intersezione con il semiasse reale negativo.

Come è facile verificare, scegliendo il percorso a risulta $T=0$ ed essendo $P=0$ risulta $T=P$ e il sistema è asintoticamente stabile internamente. Scegliendo il percorso b risulta $T=1$ ed essendo $P=1$ il sistema risulta asintoticamente stabile internamente.

E' facile rendersi conto che se il punto critico si trovasse alla destra del punto di intersezione del diagramma polare con il semiasse reale negativo, come illustrato nella Fig. 9.2.4, il sistema sarebbe instabile. Infatti, per quanto concerne il calcolo di T , scegliendo il percorso a si ha $T=-2$, mentre scegliendo il percorso b si ha $T=-1$. Poiché nel primo caso $P=0$ (il polo nell'origine viene computato come un polo a parte reale negativa), mentre nel secondo caso $P=1$ (il polo nell'origine viene computato come un polo a parte reale positiva), si ha in entrambi i casi $T \neq P$ e $Z=2$. Ne consegue che il sistema è instabile.

9.3 Sistemi a stabilità regolare e condizionata

Dall'esempio 9.1.1 si evince che, aumentando il guadagno della funzione di trasferimento a catena aperta, il sistema da stabile diventa instabile. Può, comunque, accadere che il passaggio dalla stabilità alla instabilità si manifesti anche a seguito di riduzioni del guadagno.

Con riferimento alle variazioni del guadagno, i sistemi di controllo si classificano in:

- sistemi a stabilità regolare
- sistemi a stabilità condizionata.

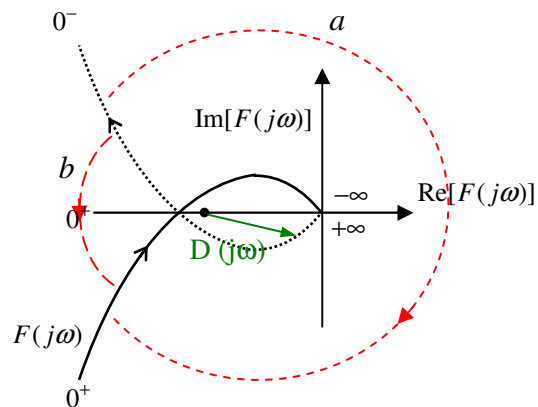


Fig. 9.2.4 Diagramma completo per la valutazione della stabilità. Punto critico a destra dell'intersezione con il semiasse reale negativo.

I sistemi a stabilità regolare sono caratterizzati dalla esistenza di un solo valore critico del guadagno k_c tale che per $k > k_c$ il sistema a catena chiusa risulta instabile (IST), mentre $k < k_c$ il sistema è asintoticamente internamente stabile (S) (cfr. Fig. 9.3.1). Per tali sistemi, il diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta presenta una sola intersezione con il semiasse reale negativo.

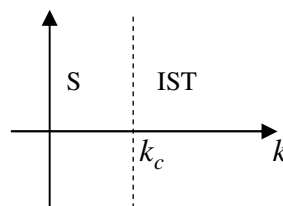
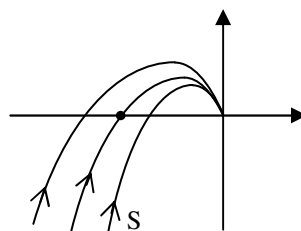


Fig. 9.3.1 Influenza del guadagno sulla stabilità: sistemi a stabilità regolare.

Nella Fig. 9.3.2 sono riportati i diagrammi polari per sistemi a stabilità regolare corrispondenti a modelli stabili, instabili e al limite di stabilità (LS). Il guadagno critico è quello corrispondente al caso in cui il diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta passa per il punto critico $(-1, j0)$.



IST LS

9.3.2 Diagrammi polari $F(j\omega)$ per sistemi a stabilità regolare.

I sistemi a stabilità condizionata sono caratterizzati da diversi valori critici del guadagno che individuano regioni contigue all'interno delle quali il sistema risulta alternativamente stabile (S) o instabile (IST, cfr. Fig. 9.3.3). I sistemi in questione sono caratterizzati da diversi punti di intersezione del diagramma polare della funzione di trasferimento a catena aperta presenta con il semiasse reale negativo (cfr. Fig. 9.3.4).

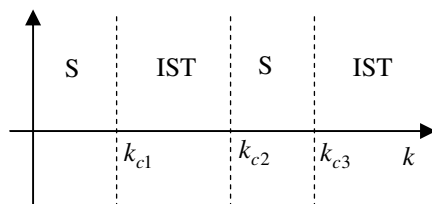


Fig. 9.3.3 Influenza del guadagno sulla stabilità: sistemi a stabilità condizionata.

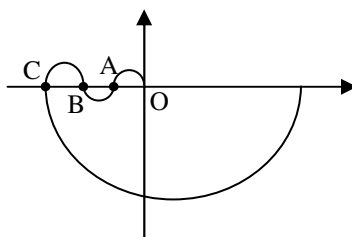


Fig. 9.3.4 Diagramma polare della $F(j\omega)$ per sistemi a stabilità condizionata.

Con riferimento alla Fig. 9.3.4, k_{c1} è il guadagno corrispondente al caso in cui l'intersezione C del diagramma polare della $F(j\omega)$ con il semiasse reale negativo coincide con il punto critico $(-1, j0)$, k_{c2} corrispondente al caso in cui l'intersezione B del diagramma polare della $F(j\omega)$ con il semiasse reale negativo coincide con il punto critico $(-1, j0)$, e k_{c3} corrispondente al caso in cui l'intersezione A del diagramma polare della $F(j\omega)$ con il semiasse reale negativo coincide con il punto critico $(-1, j0)$.

Utilizzando il criterio di Nyquist è facile verificare che:

- per $k < k_{c1}$ C è a destra del punto critico e il sistema a catena chiusa risulta asintoticamente stabile internamente;
- per $k \in (k_{c1}, k_{c2})$ il punto critico appartiene al tratto BC e il sistema è instabile;
- per $k \in (k_{c2}, k_{c3})$ il punto critico appartiene al tratto BA e il sistema è asintoticamente stabile internamente;
- per $k > k_{c3}$ il sistema risulta instabile.

9.4 Margini di stabilità

L'analisi svolta in precedenza mette in luce che mediante il criterio di Nyquist è possibile studiare la stabilità del modello matematico "nominale" di un sistema reale, cioè di un modello nel quale figurano i valori nominali dei parametri. Com'è noto, a causa delle tolleranze dei componenti utilizzati, del loro invecchiamento e delle condizioni operative del

sistema reale stesso i parametri del modello sono noti con un certo margine di incertezza. E' dunque di fondamentale importanza valutare, accanto alla stabilità nominale, se la stabilità risulti anche robusta, nel senso che essa venga mantenuta per tutti i valori previsti per i parametri del modello.

Nell'ambito della teoria classica del controllo, un modo per valutare la robustezza della proprietà di stabilità è quello di fare ricorso ai margini di stabilità, il margine di guadagno e il margine di fase, i quali misurano la distanza del modello dalle condizioni per cui si verifica l'instabilità.

Per definire i margini di stabilità si ipotizza che la curva polare abbia una sola intersezione con il semiasse reale negativo (cioè che il sistema sia a stabilità regolare) e che abbia una sola intersezione col cerchio di raggio unitario centrato nell'origine del piano di Nyquist (cfr. Fig. 9.4.1). In tali ipotesi è possibile definire un solo margine di fase e un solo margine di guadagno.

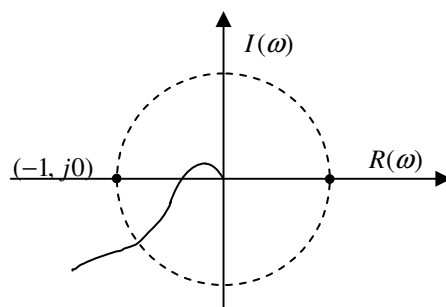


Fig. 9.4.1 Diagramma polare utile per definire i margini di stabilità.

Com'è noto, per i sistemi a stabilità regolare le condizioni limite fra stabilità interna asintotica e instabilità sono caratterizzate dal fatto che la curva polare della $F(j\omega)$ passa per il punto critico: esiste cioè un certo valore ω^* di ω tale che $F(j\omega^*) = -1$. Tale equazione equivale alle seguenti due equazioni scalari:

$$|F(j\omega^*)| = 1, \quad (9.4.1)$$

$$\angle F(j\omega^*) = -\pi. \quad (9.4.2)$$

I margini di stabilità vengono, allora, definiti ammettendo che sia soddisfatta una delle precedenti condizioni e valutando il margine rimanente perché sia soddisfatta anche la condizione rimanente.

Per definire il margine di guadagno m_g si considera il valore ω_π di ω in corrispondenza al quale viene soddisfatta la condizione di fase (9.4.2) e si valuta il margine che rimane affinché sia soddisfatta la condizione sul modulo (9.4.1). In particolare, il margine di guadagno viene definito come quel numero per cui occorre moltiplicare il $|F(j\omega_\pi)|$ per ottenere un risultato pari a 1. Quindi, si ha:

$$m_g = \frac{1}{|F(j\omega_\pi)|}. \quad (9.4.3)$$

Ne consegue che il margine di guadagno è maggiore di 1 se l'intersezione della curva polare con il semiasse reale negativo è a destra del punto critico, e cioè nel caso in cui il sistema a controreazione sia stabile.

Il margine di guadagno può essere dedotto a partire dalla curva polare o dai diagrammi di Bode della $F(j\omega)$. Con riferimento alla Fig. 9.4.2, il margine di guadagno è pari all'inverso

del modulo dell'ascissa del punto di intersezione del diagramma polare con il semiasse negativo. Con riferimento alla Fig. 9.4.3, il margine di guadagno espresso in decibel è dato da $m_g|_{dB} = -|F(j\omega_\pi)|_{dB}$ e risulta positivo se $|F(j\omega_\pi)|_{dB} < 0$.

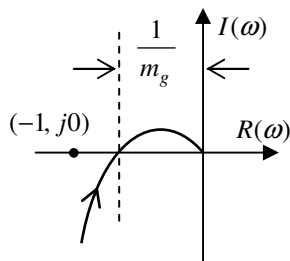


Fig. 9.4.2 Valutazione del margine di guadagno a partire dal diagramma polare della $F(j\omega)$.

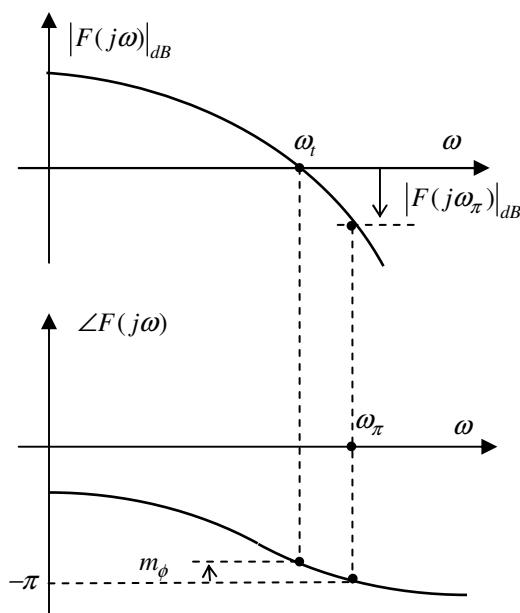


Fig. 9.4.3 Valutazione del margine di guadagno a partire dai diagrammi di Bode della $F(j\omega)$.

In maniera del tutto analoga, per definire il margine di fase m_ϕ si considera il valore ω_t di ω in corrispondenza al quale è soddisfatta la (9.4.1), cioè $|F(j\omega_t)| = 1$ ($|F(j\omega_t)|_{dB} = 0$), e si valuta il margine che rimane affinché sia soddisfatta la condizione sulla fase (9.4.2). Il margine in questione viene definito come segue:

$$m_\phi = \angle F(j\omega_t) - (-\pi) = \angle F(j\omega_t) + \pi. \quad (9.4.4)$$

Il margine di fase può essere dedotto dal diagramma polare come indicato nella Fig. 9.4.4. Con riferimento a tale figura, poiché il punto P è al disotto dell'asse reale, si ha $m_\phi \in [0, \pi/2]$. Se P si trova al disopra dell'asse reale si ha $m_\phi \in [-\pi/2, 0]$.

Il margine di fase può anche essere dedotto dai diagrammi di Bode della $F(j\omega)$ come indicato nella Fig. 9.4.3. Più precisamente, si determina, anzitutto, la pulsazione ω_t in

corrispondenza alla quale $|F(j\omega_t)|_{dB} = 0$; il margine di fase è dato dalla distanza del punto P rappresentativo della $\angle F(j\omega_t)$ dalla retta $-\pi$, ed è positivo se P sta al di sopra di tale retta.

La pulsazione ω_t viene denominata *pulsazione di attraversamento*.

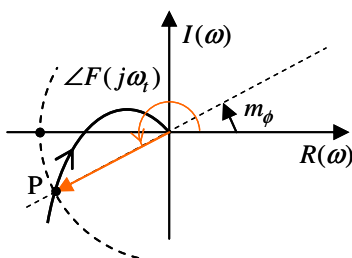


Fig. 9.4.4 Valutazione del margine di fase a partire dal diagramma polare della $F(j\omega)$.

La definizione di due margini di stabilità è giustificata dal fatto che nessuno dei due margini è sufficiente a misurare da solo la distanza del modello nominale dalle condizioni per cui si ha il passaggio alla instabilità. Ciò emerge chiaramente dall'esame della Fig. 9.4.5, dove sono illustrati i diagrammi polari di due funzioni che di trasferimento a catena aperta alle quali corrisponde identico valore per il margine di guadagno ma valori ben diversi del margine di fase. Chiaramente, il sistema caratterizzato dalla funzione II, cui corrisponde il valore più piccolo del margine di fase, è più vicino alle condizioni per cui si ha il passaggio alla instabilità rispetto al sistema caratterizzato dalla funzione I.

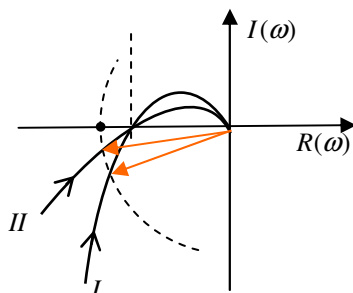


Fig. 9.4.5

Valori tipici di m_ϕ e m_g sono, rispettivamente, $40^\circ \div 50^\circ$ e $6 \div 8$ dB.

Per sistemi a stabilità regolare è possibile verificare la proprietà di stabilità a partire dalla conoscenza del segno dei margini di stabilità. Sussistono in proposito i seguenti due teoremi.

Teorema 9.1 Un sistema a controreazione, per il quale la funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ abbia un diagramma polare che, per valori positivi di ω , presenti un'unica intersezione con l'asse reale negativo del piano di Nyquist della $F(j\omega)$, e non abbia poli a parte reale positiva ($P = 0$), è asintoticamente stabile internamente se e solo se $m_g|_{dB} > 0$.

Teorema 9.2 Un sistema a controreazione, per il quale la funzione di trasferimento a catena aperta $F(s)$ abbia un diagramma polare che, per valori positivi di ω , presenti un'unica intersezione con il cerchio unitario centrato nell'origine del piano di Nyquist della $F(j\omega)$, e non abbia poli a parte reale positiva ($P = 0$), è asintoticamente stabile internamente se e solo se $m_\phi > 0^\circ$.

Per sistemi a fase minima, per i quali si possa ritenere valida la seguente relazione approssimata fra modulo e fase, in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento, data da:

$$\angle F(j\omega_t) \cong \frac{\pi}{40} \left[\frac{d|F(j\omega)|_{\text{dB}}}{d \log \omega} \right]_{\omega=\omega_t}, \quad (9.4.5)$$

è possibile giudicare qualitativamente la stabilità del sistema a catena chiusa in base alla pendenza del diagramma dei moduli in corrispondenza alla pulsazione di attraversamento. Assumendo infatti $P=0$, per il *Teorema 9.2* la condizione necessaria e sufficiente per la stabilità è che risulti:

$$\angle F(j\omega_t) \cong \frac{\pi}{40} \left[\frac{d|F(j\omega)|_{\text{dB}}}{d \log \omega} \right]_{\omega=\omega_t} > -\pi,$$

ovvero che:

$$\left[\frac{d|F(j\omega)|_{\text{dB}}}{d \log \omega} \right]_{\omega=\omega_t} > -40 \text{ dB/dec.} \quad (9.4.6)$$

9.5 Legame fra il comportamento di un sistema, i margini di stabilità e la pulsazione di attraversamento

Il margine di fase e la pulsazione di attraversamento caratterizzano il comportamento transitorio di un sistema di controllo semplice del secondo ordine, a catena chiusa. Con riferimento al sistema a catena chiusa di Fig. 9.5.1, si ha:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (9.5.1)$$

che, com'è noto, è la funzione di trasferimento di un sistema semplice del secondo ordine.

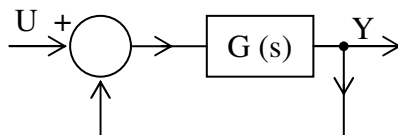


Fig. 9.5.1 Sistema semplice del secondo ordine: $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + 2\zeta\omega_n)}$.

Il margine di fase e la pulsazione di attraversamento del sistema di Fig. 9.5.1, sono dati da:

$$\omega_t = \omega_n \sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}, \quad (9.5.2)$$

$$m_\phi = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2}}{2\zeta}. \quad (9.5.3)$$

L'esame della (9.5.2) mostra che, a parità di ζ , ω_l è proporzionale a ω_n e, quindi è una misura della prontezza di risposta. L'esame della (9.5.3) mostra che il margine di fase dipende esclusivamente da ζ e, quindi, è una misura della precisione dinamica. Una relazione approssimata fra m_ϕ e ζ , che può essere ottenuta per $\zeta \leq 0.707$, è data da:

$$\zeta \cong 0.01m_\phi.$$

9.6 Criterio di Nyquist per sistemi a più anelli di controreazione

Lo studio della stabilità asintotica interna di sistemi con più anelli di controreazione, può essere effettuato applicando ripetutamente il criterio di Nyquist a partire dall'anello più interno. Considerato, ad esempio, il sistema di Fig. 9.6.1, assorbendo l'anello interno, la cui funzione di trasferimento $W_1(s)$ è data da:

$$W_1(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)H_1(s)},$$

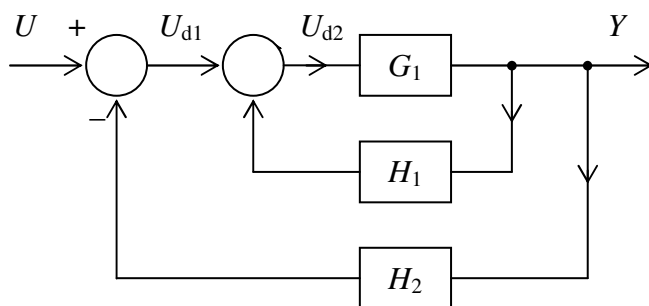


Fig. 9.6.1 Schema di controllo a due anelli di controreazione.

il sistema si riduce a un ciclo

unico

dif-

(s).

ap-

fig. 178

affinché

stabile internamente si deve verificare che il numero di giri che il vettore rappresentativo della funzione differenza:

$$D_2(j\omega) = 1 + W_1(j\omega) H_2(j\omega)$$

compie attorno al punto critico del piano di Nyquist del-

(fig. 179). La $D_1(s)$ è la funzione

funzione del ciclo interno:

$$D_1(s) = 1 + F_1(s) = 1 + G_1(s) H_1(s)$$

Al sistema rimanente è possibile

applicare il criterio di Nyquist:

il sistema sia asintoticamente

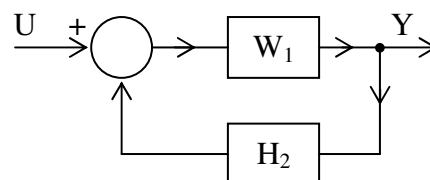


fig. 179

la funzione di trasferimento a catena aperta $F_2 = W_1 H_2$ sia pari al numero di poli a parte reale positiva della F_2 :

$$T_{D_2} = P_{F_2}.$$

Ma tale numero risulta:

$$P_{F_2} = P_{W_1} + P_{H_2}$$

di cui il primo è incognito e il secondo noto. Per determinare P_{W_1} si deve applicare il criterio di Nyquist al ciclo interno che è stato assorbito (fig. 180),

Y

per il quale deve risultare:

$$P_{W_1} = Z_{D_1}.$$

Il valore di Z_{D_1} si ricava dal principio dell'argomento:

$$T_{D_1} = P_{D_1} - Z_{D_1}$$

quindi:

$$Z_{D_1} = P_{D_1} - T_{D_1}.$$

Se $T_{D_1} = P_{D_1}$, si evince che $Z_{D_1} = 0$, quindi $P_{F_2} = P_{H_2}$, mentre se l'anello interno dovesse risultare instabile, vale la relazione $P_{W_1} = Z_{D_1}$. Alla fine si riesce quindi a provare la stabilità dell'in-tero sistema.

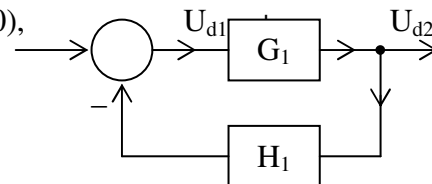


fig. 180

Cap. 10 Comportamento in regime permanente e transitorio

Premessa - Il comportamento in regime permanente e transitorio di un sistema di controllo viene studiato a partire dall'errore $E(s)$ dato da:

$$E(s) = [K_d - W(s)]U(s) - W_z(s)Z(s) = E_u(s) + E_z(s), \quad (10.1.1)$$

che coincide con la (8.1.21) assumendo $n(t) = 0 \forall t \geq 0$. Più precisamente, il comportamento di un sistema di controllo viene valutato assumendo che:

1. il sistema sia asintoticamente internamente stabile;
2. il sistema evolva dallo stato zero;
3. i segnali di ingresso, cioè disturbi e segnali di comando, siano i segnali canonici dati da:

$$\delta_{-(k+1)}(t) = \frac{t^k}{k!} \delta_{-1}(t), \quad (10.1.2)$$

4. nella prima fase di studio, sia presente uno solo dei segnali in gioco: per i sistemi di asservimento sia presente il segnale di comando e non il disturbo, mentre per i sistemi di regolazione sia presente il disturbo e non il segnale di comando.

10.1 Comportamento in regime permanente e transitorio dei sistemi di asservimento

In accordo al punto 4, lo studio del comportamento in regime permanente e transitorio dei sistemi di asservimento viene sviluppato a partire dallo schema di controllo di riferimento illustrato nella Fig. 10.1.1. Ovviamente, l'errore che si considera è quello dovuto all'imperfetto legame funzionale ingresso-uscita, dato dalla (8.1.25) che si riporta di seguito per comodità:

$$E_u(s) = [K_d - W(s)]U(s) = W_{eu}(s)U(s). \quad (10.1.3),$$

dove:

$$W_{eu}(s) = K_d - W(s).$$

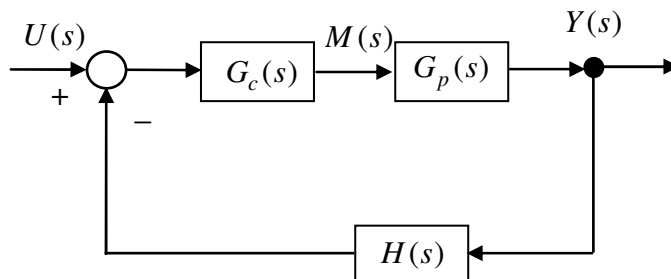


Fig. 10.1.1 Schema di controllo di riferimento per un sistema di asservimento

10.1.1 Comportamento in regime permanente.

Il Comportamento in regime permanente viene effettuato a partire dall'errore finale così definito.

Definizione 10.1.1 Si dice errore finale corrispondente a un segnale di comando di tipo canonico di ordine k , la grandezza $e_{uk} = \lim_{t \rightarrow \infty} e_u(t)$ dove $e_u(t)$ è l'errore corrispondente al segnale di comando stesso. \triangleleft

Per il teorema del valore finale, si ha:

$$e_{uk} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_u(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sW_{eu}(s) \frac{1}{s^{k+1}} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_{eu}(s)}{s^k}. \quad (10.1.4)$$

Dal punto di vista del comportamento in regime permanente, i sistemi di asservimento vengono classificati in *tipi*, in accordo alla seguente definizione.

Definizione 10.1.2 Un sistema di asservimento si dice di tipo ρ se l'errore finale corrispondente a un segnale di comando di ordine ρ risulta finito e diverso da zero. \triangleleft

E' facile dimostrare il seguente Teorema.

Teorema 10.1.1 Un sistema di asservimento è di tipo ρ se e solo se la funzione di trasferimento dell'errore dovuto all'ingresso, $W_{eu}(s)$, ha uno zero di molteplicità ρ nell'origine. \triangleleft

Prova Dall'esame della (10.1.4) emerge che se $W_{eu}(s)$ ha uno zero di molteplicità ρ nell'origine, allora $e_{u\rho}$ è finito e diverso da zero. Inoltre, $e_{u\rho}$ finito e diverso da zero implica che $W_{eu}(s)$ abbia uno zero di molteplicità ρ nell'origine. Infatti, se $W_{eu}(s)$ avesse uno zero nell'origine di molteplicità maggiore di ρ allora $e_{u\rho} = 0$, mentre se $W_{eu}(s)$ avesse uno zero nell'origine di molteplicità minore di ρ allora $e_{u\rho} = \infty$. \triangleleft

Dal Teorema 10.1.1 emerge che:

- un sistema di asservimento di tipo ρ , sollecitato da un ingresso canonico di ordine minore di ρ ha un errore finale nullo, il che implica che il sistema, a partire da un certo istante di tempo, è in grado di inseguire perfettamente il segnale di comando;
- un sistema di asservimento di tipo ρ , sollecitato con un ingresso canonico di ordine ρ , è in grado di inseguire asintoticamente il segnale di comando, ma con un errore finito e diverso da zero;
- un sistema di asservimento di tipo ρ , sollecitato con un ingresso canonico di ordine maggiore di ρ , non è in grado di inseguire il segnale di comando.

Adesso, nello spirito del legame diretto fra il comportamento dell'intero sistema e quello delle singole parti di cui è costituito, conviene determinare condizioni per l'appartenenza di un sistema al tipo ρ direttamente sulle funzioni $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ e $H(s)$. In proposito conviene distinguere il caso dei sistemi a reazione proporzionale da quello dei sistemi a reazione dinamica.

Sistemi a reazione proporzionale

Un sistema a reazione proporzionale è un sistema a controreazione (cfr. 10.1.1) nel quale $H(s) = 1/K_d$. Per tale sistema, la funzione $W_{eu}(s)$ risulta:

$$W_{eu}(s) = K_d - W(s) = \frac{K_d^2}{K_d + G(s)}, \quad (10.1.5)$$

dove $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ e, pertanto, gli zeri della funzione $W_{eu}(s)$ coincidono con i poli della funzione $G(s)$. Si dimostra, allora, la seguente Asserzione.

Asserzione 1 Un sistema a reazione proporzionale è di tipo ρ se la funzione $G(s)$ ha un polo di molteplicità ρ nell'origine. ◁

Per un sistema di tipo ρ , l'errore finale è dato da (cfr. (10.1.4)):

$$e_{u\rho} = \lim_{s \rightarrow 0} W_{eu}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_d^2}{K_d s^\rho + s^\rho G(s)}. \quad (10.1.6)$$

Poiché $G(s)$ ha un polo di molteplicità ρ nell'origine, com'è noto, si ha $\lim_{s \rightarrow 0} s^\rho G(s) \triangleq K_{gG}$ dove K_{gG} è il guadagno della funzione $G(s)$. Ne consegue che:

$$e_{u\rho} = \begin{cases} \frac{K_d^2}{K_d + K_{gG}}, \rho = 0 \\ \frac{K_d^2}{K_{gG}}, \rho \geq 1 \end{cases}. \quad (10.1.7)$$

La (10.1.7) mostra che l'errore finale diminuisce al crescere del guadagno della funzione di trasferimento della linea di azione diretta.

Sistemi a reazione dinamica

Si assuma, adesso, che la retroazione sia dinamica e, cioè, che $H(s)$ sia data da:

$$H(s) = \frac{\sum_{j=0}^L \delta_j s^j}{\sum_{j=0}^P \gamma_j s^j}. \quad (10.1.8)$$

In tale caso, il fatto che la funzione $G(s)$ abbia un polo di molteplicità ρ nell'origine non implica che il sistema sia di tipo ρ . Ciò può essere verificato osservando che la funzione $W_{eu}(s)$ ha uno zero di molteplicità ρ nell'origine se risulta:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^k}{ds^k} W_{eu}(s) = 0, \quad k = 0, \dots, \rho - 1, \quad (10.1.9)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^\rho}{ds^\rho} W_{eu}(s) \neq 0 \text{ e finito.} \quad (10.1.10)$$

Assumendo che $G(s)$ abbia un polo nell'origine di molteplicità 1 e scrivendo tale funzione come segue:

$$G(s) = \tilde{G}(s) \frac{1}{s}, \quad \tilde{G}(0) \neq 0,$$

la funzione $W_{eu}(s)$ diviene:

$$W_{eu}(s) = K_d - W(s) = K_d - \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = K_d - \frac{\tilde{G}(s)}{s + \tilde{G}(s)H(s)},$$

e per $s \rightarrow 0$, si ha:

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_{eu}(s) = K_d - \frac{\tilde{G}(0)}{\tilde{G}(0)H(0)} = K_d - \frac{1}{H(0)}. \quad (10.1.11)$$

Ne consegue che il sistema è di tipo 0, a meno che il guadagno della funzione $H(s)$ non venga scelto pari a:

$$H(0) = \frac{\delta_0}{\gamma_0} = \frac{1}{K_d}. \quad (10.1.12)$$

Osservazione 10.1.1 Si noti che la condizione (10.1.12), molto semplice da realizzare, è anche semplice da mantenere nel tempo, poiché essa coinvolge parametri della funzione $H(s)$ che, come già detto, deve essere realizzata con tolleranze molto strette.

Assumendo, adesso, che $G(s)$ abbia un polo nell'origine di molteplicità 2, ponendo:

$$G(s) = \tilde{G}(s) \frac{1}{s^2}, \quad \tilde{G}(0) \neq 0$$

le condizioni per l'appartenenza del sistema di asservimento al tipo 2 sono date dalla (10.1.12) e dalla relazione:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} W_{eu}(s) = 0. \quad (10.1.13)$$

Poiché risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} W_{eu}(s) \triangleq W_{eu}^{(1)}(s) &= -\frac{d}{ds} \frac{\tilde{G}(s)}{s^2 + \tilde{G}(s)H(s)} = \\ &= -\frac{\tilde{G}^{(1)}(s)(s^2 + \tilde{G}(s)H(s)) - \tilde{G}(s)(2s + \tilde{G}^{(1)}(s)H(s) + \tilde{G}(s)H^{(1)}(s))}{(s^2 + \tilde{G}(s)H(s))^2}, \end{aligned} \quad (10.1.14)$$

si ottiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} W_{eu}(s) = - \frac{\tilde{G}^{(1)}(0)\tilde{G}(0)H(0) - \tilde{G}(0)\left(\tilde{G}^{(1)}(0)H(0) + \tilde{G}(0)H^{(1)}(0)\right)}{\left(\tilde{G}(0)H(0)\right)^2} = - \frac{H^{(1)}(0)}{H^2(0)}. \quad (10.1.15)$$

Essendo inoltre:

$$H^{(1)}(s) = \frac{\sum_{j=1}^L j\delta_j s^{j-1} \sum_{j=0}^P \gamma_j s^j - \sum_{j=0}^L \delta_j s^j \sum_{j=1}^P j\gamma_j s^{j-1}}{\left(\sum_{j=0}^P \gamma_j s^j\right)^2},$$

si ha:

$$H^{(1)}(0) = \frac{\delta_1 \gamma_0 - \delta_0 \gamma_1}{\gamma_0^2},$$

e la (10.1.13) diviene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} W_{eu}(s) = - \frac{\delta_1 \gamma_0 - \delta_0 \gamma_1}{\left(\frac{\delta_0}{\gamma_0}\right)^2} = \frac{\delta_1 \gamma_0 - \delta_0 \gamma_1}{\delta_0^2} = 0. \quad (10.1.16)$$

Le (10.1.12) e (10.1.16) mostrano che la presenza di un polo doppio nell'origine nella funzione di trasferimento della linea di azione diretta, $G(s)$, non implica che il sistema sia di tipo 2. Tuttavia, se $G(s)$ ha un polo doppio nell'origine, le condizioni di appartenenza del sistema al tipo ρ sono soddisfatte se e solo se risulta:

$$H(0) = \frac{\delta_0}{\gamma_0} = \frac{1}{K_d}, \quad (10.1.17)$$

$$\frac{\delta_1}{\gamma_1} = \frac{\delta_0}{\gamma_0} = \frac{1}{K_d}. \quad (10.1.18)$$

Le (10.1.17) e (10.1.18) sono semplici da realizzare e da mantenere nel tempo per le stesse motivazioni illustrate nella *Osservazione* 10.1.1.

10.1.2 Comportamento transitorio

Lo studio del comportamento transitorio viene effettuato assumendo che il segnale di comando sia a gradino unitario e calcolando il corrispondente errore transitorio. Tale errore è dato da:

$$e_{urr}(t) = e_u(t) - e_{u0}, \quad (10.1.19)$$

dove e_{u0} è l'errore finale e $e_u(t)$ è l'errore complessivo dato da:

$$e_u(t) = L^{-1}(E_u(s)) = L^{-1}\left[\left(K_d - W(s)\right)\frac{1}{s}\right] = K_d - w_{-1}(t), \quad t \geq 0. \quad (10.1.20)$$

Ne consegue che:

$$e_{urr}(t) = K_d - e_{u0} - w_{-1}(t), \quad t \geq 0. \quad (10.1.21)$$

Poiché $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{urr}(t) = 0$, si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} w_{-1}(t) = K_d - e_{u0}$.

Ciò premesso, lo studio del comportamento transitorio dei sistemi di asservimento può essere effettuato in due modi.

Nel primo vengono utilizzate le grandezze caratteristiche dell'errore transitorio e cioè il tempo di salita, il tempo di formazione, la eventuale sovraelongazione, il tempo di assestamento, il tempo all'emivalore e l'eventuale tempo al picco.

Nel secondo vengono impiegati gli indici di qualità. Tali indici permettono di valutare il comportamento transitorio in maniera globale, in quanto sono dei funzionali che permettono di associare un numero all'andamento dell'errore transitorio nell'intervallo $[0, +\infty)$.

L'espressione generale di un indice di qualità è la seguente:

$$J = \int_0^{+\infty} f(e_{tr}(t))t^i dt, \quad (10.1.22)$$

dove $f(e_{tr}(t))$, denominata funzione importanza, pesa gli errori in relazione alla loro entità, mentre t^i , denominata funzione peso, pesa gli errori in relazione al tempo in cui si manifestano.

Scegliendo come funzione importanza la funzione:

$$f(e_{tr}(t)) = e_{tr}^2(t), \quad (10.1.23)$$

possono essere definiti i seguenti indici:

$$ISE = \int_0^{+\infty} e_{tr}^2(t) dt, \quad (10.1.24)$$

$$ITSE = \int_0^{+\infty} e_{tr}^2(t) t dt. \quad (10.1.25)$$

Scegliendo come funzione peso la funzione:

$$f(e_{tr}(t)) = |e_{tr}(t)|, \quad (10.1.26)$$

possono essere definiti gli indici:

$$IAE = \int_0^{+\infty} |e_{tr}(t)| dt, \quad (10.1.27)$$

$$ITAE = \int_0^{+\infty} |e_{tr}(t)| t dt. \quad (10.1.28)$$

L'impiego più interessante degli indici di qualità si ha nella sintesi di un sistema di controllo. In tale ambito, il problema che ci si pone è quello di progettare un controllore in modo tale da minimizzare l'indice di qualità prescelto.

L'indice più diffuso è l'indice ISE poiché può essere minimizzato per via analitica. Tuttavia, la minimizzazione di tale indice porta a controllori troppo aggressivi. Infatti, la funzione importanza di tipo quadratico penalizza fortemente gli errori elevati e, conseguentemente, il controllore progettato minimizzando l'indice ISE tende a ridurre rapidamente tali errori. Ciò comporta una elevata prontezza di risposta accompagnata, però, da una elevata sovraelongazione e da una rilevante tendenza alle oscillazioni poiché, a causa della elevata azione di controllo iniziale, l'uscita supera di molto il valore finale prima di iniziare a diminuire; la riduzione dell'errore è ancora piuttosto rapida dovuta a una forte azione di controllo, il che comporta una sottoelongazione dell'uscita. D'altra parte, poiché la funzione importanza attribuisce poco peso agli errori piccoli, il tempo di assestamento può risultare elevato.

Risultati migliori possono essere ottenuti con gli altri indici di qualità che, però, possono essere minimizzati solamente per via numerica.

10.2 Comportamento in regime permanente e transitorio dei sistemi di regolazione

Lo studio del comportamento in regime permanente e transitorio dei sistemi di regolazione, nell'ambito della teoria classica dei sistemi di controllo, viene effettuato assumendo che l'ingresso sia costituito da un disturbo a gradino unitario. Lo schema di riferimento è quello illustrato nella Fig. 10.1.2 e l'errore corrispondente è dato dalla 8.1.26 che si riporta di seguito per comodità:

$$E_z(s) = -W_z(s)Z(s). \quad (10.1.29)$$

10.2.1 Comportamento in regime permanente

Dal punto di vista del comportamento in regime permanente, i sistemi di regolazione si suddividono in sistemi statici e astatici, in accordo alla seguente definizione.

Definizione 10.1.3 Un sistema di regolazione si dice statico o astatico rispetto a un disturbo a gradino, a seconda che l'errore finale conseguente al disturbo sia, rispettivamente, finito e diverso da zero o nullo. ◀

Teorema 10.1.2 Un sistema di regolazione è astatico se e solo se la funzione di trasferimento disturbo-uscita presenta uno zero nell'origine. ◀

Prova L'errore relativo al disturbo è dato dalla (10.1.29); quindi l'errore finale e_{z0} , corrispondente a un disturbo a gradino, risulta:

$$e_{z0} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_z(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} sW_z(s) \frac{1}{s} = -W_z(0). \quad (10.1.30)$$

◁

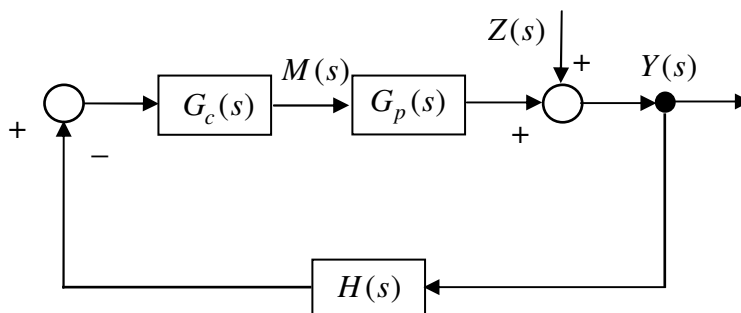


Fig. 10.1.2 Schema di controllo di riferimento per un sistema di regolazione.

Conviene, adesso, determinare le condizioni da soddisfare perché il sistema sia astatico, sulle funzioni associate alle singole parti del sistema stesso. In proposito, conviene osservare che la funzione di trasferimento disturbo-uscita, con riferimento allo schema di Fig. 10.1.2, è data da:

$$W_z(s) = \frac{1}{1 + F(s)}.$$

Pertanto, il sistema è astatico se e solo se la funzione di trasferimento a catena aperta $F(s) = G_c(s)G_p(s)H(s)$ ha un polo nell'origine. Escludendo che $H(s)$ abbia un polo nell'origine, perché altrimenti una grandezza di uscita costante produrrebbe una grandezza di controreazione a rampa lineare, si deduce che il sistema di Fig. 10.1.2 è astatico se e solo se la funzione $G_c(s)G_p(s)$ ha un polo nell'origine.

Se il disturbo agisce all'ingresso della funzione di trasferimento $G_p(s)$, com'è facile verificare, si ha:

$$W_z(s) = \frac{G_p(s)}{1 + F(s)}. \quad (10.1.31)$$

Osservando che gli zeri di $W_z(s)$ sono gli zeri di $G_p(s)$ e i poli di $G_c(s)H(s)$, che $H(s)$ non può avere poli nell'origine e che $G_p(s)$ non può avere zeri nell'origine, altrimenti l'uscita non potrebbe risultare costante, si conclude che il polo nell'origine, che rende astatico l'intero sistema, deve essere contenuto nella $G_c(s)$. Risulta quindi dimostrato il seguente risultato:

Teorema 10.1.3 Un sistema di regolazione è astatico se e solo se la funzione di trasferimento della linea di azione diretta, che sta a monte del punto di ingresso del disturbo, presenta un polo nell'origine. ◁

10.2.2 Comportamento transitorio

Lo studio del comportamento transitorio dei sistemi di regolazione si effettua assumendo che il disturbo sia a gradino unitario, $z(t) = \delta_{-1}(t)$. Tale studio si basa sul calcolo dell'errore transitorio, in accordo alla seguente espressione:

$$e_{ztr}(t) = e_z(t) - e_{z0}, \quad t \geq 0 \quad (10.1.32)$$

dove e_{z0} è l'errore finale ed $e_z(t)$ è l'errore complessivo dato da:

$$e_z(t) = L^{-1}(E_z(s)) = L^{-1}\left[-W_z(s)\frac{1}{s}\right] = -w_{z,-1}(t), \quad t \geq 0. \quad (10.1.33)$$

Ne consegue che:

$$e_{ztr}(t) = -e_{z0} - w_{z,-1}(t), \quad t \geq 0. \quad (10.1.34)$$

Poiché $\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ztr}(t) = 0$, si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} w_{z,-1}(t) = -e_{z0}$.

Ciò premesso, lo studio del comportamento transitorio dei sistemi di regolazione si effettua in modo analogo a quello dei sistemi di asservimento.