LIMITI DI FUNZIONI

SALVATORE MODICA

DEFINIZIONI ED ESEMPI

Pensiamo alla definizione di limite per le successioni, che sono funzioni con dominio $\mathbb{N}_+$. Per esempio per $a_n \to \infty$, la definizione dice che per ogni K esiste un punto n_K nel dominio di (a_n) a partire dal quale — nella 'direzione di movimento' di n— la funzione/successione ha valori maggiori di K. Lo stesso per $a_n \to l$: a partire da un n_ϵ la funzione dista da l meno di ϵ. Per le funzioni che non sono successioni l'idea resta la stessa. Di diverso c'è che mentre n non può che andare a infinito, la x può tendere a infinito, a meno infinito, o ad un valore finito. E poi n 'saltella' lungo la retta, mentre x si muove con continuità (per visualizzare, immagina una circonferenza che rotola su una retta: il punto di contatto fra le due si muove con continuità sulla retta).

I casi di $x \to \infty$ ed $x \to -\infty$ sono i più simili alle successioni, e da questi cominciamo. *Per esempio*, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Intuitivamente l'idea è che f supera qualunque prefissato valore (altezza) purchè x sia sufficientemente 'lontano' nella direzione di movimento (cioè verso sinistra). Formalmente: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ se per ogni $K \in \mathbb{R}$ esiste x_K tale che $\forall x < x_K$ si ha $f(x) > K$. Come per le successioni, e per lo stesso motivo, basta considerare i $K > \overline{K}$ per un arbitrario $\overline{K}$, per esempio zero, e dire dunque "$\forall K > 0$" invece di "$\forall K \in \mathbb{R}$".

Analogamente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste x_M tale che $\forall x > x_M$ si ha $f(x) < M$. Qui basta considerare $M < 0$; *pensando K come positivo* e quindi M come $-K$, possiamo allora dire: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ se per ogni $K > 0$ esiste x_K tale che $\forall x > x_K$ si ha $f(x) < -K$. *Così la lettera K indicherà sempre un numero positivo*; questo torna comodo nelle disequazioni.

Date: 6.XII.97, 3.XI.98. Univ. di Palermo, Istituto di Matematica per la R.O.

Ancora, $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$: quando x si muove verso destra, la distanza (verticale nelle figure) fra f ed l diventa minore di qualunque prefissato valore (che sarà ϵ), purchè si aspetti abbastanza; cioè: per ogni $\epsilon > 0$ esiste x_ϵ tale che $\forall x > x_\epsilon$ risulta $|f(x) - l| < \epsilon$. E' quasi superfluo osservare che per verificare $f \to l$ basta considerare $\epsilon < \bar{\epsilon}$ qualunque.

Si scrivano le altre definizioni per x tendente a più o meno infinito (i casi sono $x \to \pm\infty$ con limite $l \in \mathbb{R}$ o $\pm\infty$).

NOTE. **(1)** Un punto su cui abbiamo sorvolato è: quando diciamo "$\forall x > x_\epsilon$ risulta $|f(x) - l| < \epsilon$", ovviamente tutte queste x devono essere nel dominio di f, altrimenti la definizione non ha senso. Analogo il caso di $x \to -\infty$.

(2) Per scrivere le negazioni delle definizioni di limite (tipo "non è vero che $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$") servono le negazioni di espressioni come "*per ogni* $\epsilon > 0$ succede che..." o "*esiste* x_k tale che..."; queste si fanno così: se $\mathbb{P}$ è una frase, indichiamo con $\neg\mathbb{P}$ la sua negazione (se $\mathbb{P}$ è "mangio" $\neg\mathbb{P}$ è "non mangio"); qual è la negazione di "ogni giorno mangio"? E': "esiste un giorno in cui non mangio". E se $\mathbb{P}(x)$ è "sono ricco nel giorno x", qual è la negazione di "esiste un x tale che $\mathbb{P}(x)$"? E': "per ogni x, $\neg\mathbb{P}(x)$". Stiamo usando queste equivalenze logiche:

$$\neg\big(\forall x\ \mathbb{P}(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \exists x \text{ tale che } \neg\mathbb{P}(x)$$
$$\neg\big(\exists x \text{ tale che } \mathbb{P}(x)\big) \quad\Leftrightarrow\quad \forall x\ \neg\mathbb{P}(x).$$

ESEMPI. In pratica, per verificare un limite si fa come per le successioni: si vede se la disequazione rilevante è soddisfatta per le x che vogliamo.

(a) $f(x) = ax + b$, una retta; vediamola con $a < 0$. Per $x \to \infty$: $ax+b < -K \Leftrightarrow x > (-K-b)/a = x_K$, dunque $\lim_{x\to\infty}(ax+b) = -\infty$. Analogamente $\lim_{x\to-\infty}(ax+b) = \infty$.

(b) $f(x) = ax^2$, parabola. Prendiamo $a > 0$: sembra $\lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to-\infty} = \infty$, e in effetti (prendendo come sempre $K > 0$), $ax^2 > K$ se $x > \sqrt{K/a}$, che verifica il primo (con $x_K = \sqrt{K/a}$), e se $x < -\sqrt{K/a}$, che verifica il secondo (con $x_K = -\sqrt{K/a}$).

Usando l'esercizio 3 si trovano per $f(x) = ax^2 + bx + c$ gli stessi risultati (ovvi dai disegni) scrivendo $ax^2 + bx + c = y_0 + a(x - x_0)^2$.

(c) Un'iperbole, $f(x) = \alpha/x$; vogliamo esaminarne il comportamento per $x \to \pm\infty$ (ogni altra iperbole ha comportamento analogo per l'esercizio 4). Poichè $|\alpha/x| < \epsilon \Leftrightarrow |x| > |\alpha|/\epsilon$, è $\lim_{x\to\pm\infty} \alpha/x = 0$. Di α/x, pensiamo per esempio ad $\alpha > 0$, vorremmo anche dire che 'tende a infinito per x che va a zero da destra, ed a meno infinito per x che va a zero da sinistra. Lo faremo fra poco.

(d) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$, e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} f(-x)$. Facciamo la prima, per esempio con $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$: dato ϵ, per

$x > x_\epsilon$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$; dunque per $x < -x_\epsilon$ $|f(-x) - l| < \epsilon$ (se questa verifica ti sembra troppo breve, chiama $g : x \mapsto f(-x)$ e verifica che l'x_ϵ richiesto per g, x_ϵ^g è l'opposto dell'x_ϵ esistente per f, x_ϵ^f).

(e) Funzioni esponenziali $f(x) = a^x$. Per $a > 1$: $a^x > K \Leftrightarrow x > \log_a K = x_K$, dunque $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$. E $|a^x| < \epsilon \Leftrightarrow a^x < \epsilon \Leftrightarrow x < \log_a \epsilon = x_\epsilon$, dunque $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$. Il caso $0 < a < 1$ è altrettanto facile, e comunque sappiamo dall'esempio precedente che deve essere $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$. Questo somiglia molto a quanto fatto con le successioni: "Se $x_n \to \infty$, allora per $a > 1$ è $a^{x_n} \to \infty$", eccetera; ricordi? Bene, c'è più che una somiglianza; lo vedremo meglio.

(f) Accertati che $\lim_{x\to\infty} \log_a x$ è come sembra. Soluzione in nota (non guardare subito). [1]

(g) Disegna due funzioni potenza $f(x) = x^\alpha$, una con $\alpha > 0$ e una con $\alpha < 0$, e verifica che i limiti per $x \to \infty$ sono quelli che i grafici suggeriscono; soluzione in nota. [2]

(h) Per n intero si può considerare anche $\lim_{x\to-\infty} x^n$. Indoviniamo dai grafici; per verificare: [3] se n è pari $x^n = (-x)^n$; prendi $x < 0$ e $K > 0$, così $x^n = (-x)^n > K \Leftrightarrow -x > \sqrt[n]{K} \Leftrightarrow x < -\sqrt[n]{K} = x_K$, cioè $\lim_{x\to-\infty} f = \infty$. Se n è dispari $x^n < -K \Leftrightarrow x < \sqrt[n]{-K}$, e il limite vale $-\infty$.

Se n intero dispari possiamo fare pure $\lim_{x\to-\infty} x^{1/n}$. Come sopra, verifica che il limite è $-\infty$.

(i) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. L'abbiamo visto con le successioni. Vogliamo $|f(x)| = f(x) < \epsilon$ per $x > x_\epsilon$. Ma $f(x) = 1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) \leq 1/(2\sqrt{x}) < \epsilon$ per $x > 1/4\epsilon^2 = x_\epsilon$.

Fin qui, rispetto a quanto visto per le successioni si può dire che abbiamo solo cambiato nome ad n ed a_n, chiamandole x ed $f(x)$. Qualcosa di nuovo (ma non troppo) si vede considerando x che tende ad un valore finito, come nei grafici di $1/x$ ed $1/|x|$ riportati nella prossima figura.

Cominciamo da $1/x$, e immaginiamo x *positivo* che va verso 0, cosa che scriviamo come $x \to 0^+$. [4] Vogliamo dire che f tende a infinito, e l'idea è la stessa di sempre: comunque fissato K, camminando lungo l'asse delle x verso zero (da destra) ci sarà un punto a partire dal quale la f sta sopra K. In altre parole, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ se dato $K > 0$ esiste x_K tale che per ogni $x \in (0, x_K)$ si ha $f(x) > K$. Nota che richiediamo $0 < x < x_K$, non $0 \leq x < x_K$: stiamo esaminando

---

[1] Se $a < 1$ è $\log_a x < K$ per $x > a^K = x_K$, quindi $\lim_{x\to\infty} \log_a x = -\infty$; analogamente si vede che $\lim_{x\to\infty} \log_a x = \infty$ se $a > 1$.

[2] Per $\alpha > 0$, $x^\alpha > K \Leftrightarrow x > K^{1/\alpha} = x_K$, dunque $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = \infty$. Per $\alpha < 0$ si può scrivere $x^\alpha = (x^{-1})^{-\alpha}$ per verificare che $\lim_{x\to\infty} x^\alpha = 0$.

[3] usando la proposizione del paragrafo 'Ancora sulle potenze ad esponente intero' di UiN

[4] $x \to 0^+$ abbrevia $(x \to 0)^+$, cioè il $+$ si riferisce ad $x \to 0$, non a 0.

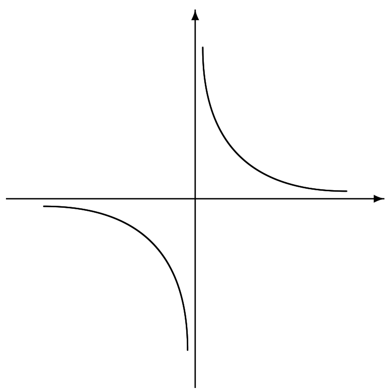

Grafico di x^{-1}

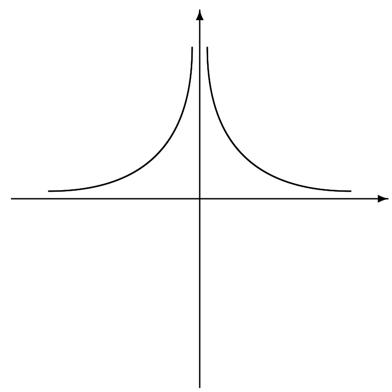

Grafico di $|x|^{-1}$

cosa fa la f per x *vicino* a zero, *non* uguale. Per esempio nella figura da cui siamo partiti, in $x = 0$ la f non è nemmeno definita. Nota anche il $K > 0$ che è più comodo ma equivalente; questo fatto non lo menzioneremo più, a partire dal prossimo capoverso.

Se d'altra parte facciamo tendere x a 0 da sinistra (scritto $x \to 0^-$), intuitivamante f tende a meno infinito, perchè: per ogni $K > 0$ esiste x_K tale che per ogni $x \in (x_K, 0)$ si ha $f(x) < -K$. E questa è la definizione di $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Nota. Nel considerare il limite di una f per $x \to x_0^+$ abbiamo supposto che esiste un intervallo $(x_0, x_0+\delta) \subseteq D_f$; discorso discorso analogo per $x \to x_0^-$. In effetti, che senso avrebbe considerare il limite di $\log x$ per $x \to 0^-$, o per $x \to -3$?

Nello stesso spirito, quando faremo $x \to x_0$ supporremo che il dominio di f contiene sia un intorno sinistro di x_0 che uno destro (anche se *non* necessariamente il punto x_0 stesso).

ESEMPI. (a) $\lim_{x\to 0^-} 1/x = -\infty$, perchè: abbiamo $1/x < -K \Leftrightarrow 0 > x > -1/K = x_K$. Fai i limiti di α/x per $x \to 0^+$ ed $x \to 0^-$, con $\alpha \gtrless 0$. Questo completa il quadro per le iperboli.

(b) Le funzioni potenza con esponente negativo sono del tipo $1/x^\alpha$ con $\alpha > 0$ (abbiamo considerato $\alpha = 1$ sopra). E' $\lim_{x\to 0^+} 1/x^\alpha = \infty$, perchè $1/x^\alpha > K \Leftrightarrow 0 < x < (1/K)^{1/\alpha} = x_K$. Delle funzioni potenza per $x \to 0^+$ resta da vedere quelle con esponente positivo (vedi prossimo esempio (a)).

Il caso di $1/|x|$ ha di diverso che *comunque* facciamo tendere x a zero —da destra o da sinistra— la f va a infinito. Nei casi come questo, cioè se esistono i limiti destro e sinistro e sono uguali, diciamo che esiste $\lim_{x\to 0} f(x)$, con quel valore comune. Nel nostro caso, poichè $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, è $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$. Nota che ciò è equivalente a dire che per ogni $K > 0$ esiste un x_K tale che per

$-x_K < x < x_K$, $x \neq x_0$ (cioè $0 < |x| < x_K$), $f(x) > K$. (perchè: supponiamo che i due limiti destro e sinistro esistono e sono uguali. Allora $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ implica che esiste un x_K^d tale che $f(x) > K$ per $0 < x < x_K^d$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ implica che esiste un x_K^s tale che $f(x) > K$ per $x_K^s < x < 0$; quindi posso prendere $x_K = \min\{x_K^d, -x_K^s\}$. Viceversa se per ogni K esiste un x_K tale che per $0 < |x| < x_K$, $f(x) > K$, posso prendere $x_K^d = x_K^s = x_K$).

Se $x \to x_0$ la $0 < |x| < x_K$ viene sostituita da $0 < |x - x_0| < x_K$. Per ricordare che più grande K più piccolo deve generalmente essere x_K si indica quest'ultimo con δ_K (δ ed ϵ sono le lettere dei numeri piccoli); sicchè: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ se per ogni $K > 0$ esiste δ_K tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_K$ è $f(x) > K$.

Pensiamo infine al grafico di $f(x) = x^2$, e facciamo andare x a 2. Qui per $x \to 2$ la f tende ad un valore finito (4, che non ha niente di speciale). La definizione è allora (disegna): $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che per $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$ si ha $|f(x) - l| < \epsilon$. *Nota il* "$0 <$": nella definizione di limite non si pone alcuna restrizione su f in x_0 (cfr. l'esempio (c) qui sotto). Per esercizio si definiscano i limiti sinistro e destro per questo caso.

Ricapitolando, abbiamo visto tre tipi di limiti: (i) $x \to \pm\infty$, dove tutto è come per le successioni; (ii) $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ed $f \to \pm\infty$; (iii) $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ ed $f \to l \in \mathbb{R}$. Accertati di saperle scrivere tutte.

ESEMPI. (a) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$: con $\delta_\epsilon = \epsilon$.

(b) Per $\alpha > 0$, $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, perchè $x^\alpha < \epsilon \Leftrightarrow 0 < x < \epsilon^{1/\alpha} = \delta_\epsilon$.

(c) Considera

$$f(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ 3 & x = 0 \\ x & x > 0. \end{cases}$$

Qui $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (anche se $f(0) = 3$). La verifica dei limiti destro e sinistro è immediata.

(d) Determina $a \in \mathbb{R}$ tale che esista $\lim_{x\to 3} f(x)$ per la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x < 3 \\ x + a & x > 3. \end{cases}$$

Si verifichi che $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 7$ e $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 + a$; dunque $a = 4$.

(e) Verifichiamo che $\lim_{x\to 1} (\sqrt{x} - 1)/(x - 1) = 1/2$. Si ha

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{1 - x}{2(1 + \sqrt{x})^2} \right| = \frac{|x - 1|}{2(1 + \sqrt{x})^2} < |x - 1|,$$

dunque possiamo prendere $\delta_\epsilon = \epsilon$.

Nota che con la maggiorazione si ottiene un δ_ϵ *più* che sufficiente perchè $|f(x)-l|<\epsilon$ (considera la $g(x)=|f(x)-l|$ e vedilo prima di tutto graficamente). In questo esempio se si risolve $|f(x)-1/2|<\epsilon$ si ottiene (con $\epsilon<1/2$) $\delta_\epsilon=\min\{1-(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon})^2,(\frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})^2-1\}$, che si può verificare essere maggiore di ϵ per $\epsilon<1/2$.

(f) $\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4$. Vogliamo δ_ϵ tale che per $|x-2|<\delta_\epsilon$ si abbia $|f(x)-4|=3|\frac{x-2}{x-1}|<\epsilon$. Prendendo per esempio $|x-2|<1/2$, è $|x-1|=x-1>1/2$, dunque $3|\frac{x-2}{x-1}|<6|x-2|$. Dunque $\delta_\epsilon=\min\{1/2,\epsilon/6\}$ va bene.

(g) $\lim_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$. Si fa con le formule di prostaferesi, come abbiamo fatto con $\cos x_n$: per $0<|x|<\pi/2$ si ha $|\sin x-\sin x_0|=2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\cdot|\cos\frac{x+x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\le|x-x_0|$; dunque $|\sin x-\sin x_0|<\epsilon$ per $|x-x_0|<\min\{\pi/2,\epsilon\}$.

Allo stesso modo si vede $\lim_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$. E si può verificare per esercizio che $\lim_{x\to\pi/2^-}\tan x=\infty$, sfruttando $\lim_{x\to\pi/2^-}\cos x=\cos\pi/2=0$ ed il fatto che per x vicino a $\pi/2$ è $\operatorname{sen}x>1/2$. Soluzione in nota. [5]

E' anche $\lim_{x\to-\pi/2^+}\tan x=-\infty$. [6] Dalla periodicità della tangente deduciamo allora anche $\lim_{x\to\pi/2^+}\tan x=-\infty$. In particolare *non* esiste $\lim_{x\to\pi/2}\tan x$ perchè i limiti destro e sinistro esistono ma sono diversi.

(h) Per $x_0>$ è $\lim_{x\to x_0}\log x=\log x_0$ (ricorda che 'nel discreto' $x_n\to x_0\Rightarrow\log x_n\to\log x_0$; la presente verifica è analoga). Soluzione in nota. [7]

(i) Una condizione 'di Cauchy' per l'esistenza del limite: se esiste $l=\lim_{x\to x_0}f(x)$ allora $\forall\epsilon$ esiste δ_ϵ tale che $\forall x,x'\in(x_0-\delta_\epsilon,x_0+\delta_\epsilon)\setminus\{x_0\}$ si ha $|f(x)-f(x')|<\epsilon$. Perchè $|f(x)-f(x')|\le|f(x)-l|+|f(x')-l|$.

(j) Applicazione dell'esempio precedente: non esiste $\lim_{x\to 0}f$ per

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\le 0\\ \operatorname{sen}\frac{1}{x} & x>0.\end{cases}$$

Qui il limite non esiste perchè non esiste $\lim_{x\to 0^+}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$: in ogni intervallo $(0,\delta)$ ci sono x,x' tali che $\operatorname{sen}\frac{1}{x}-\operatorname{sen}\frac{1}{x'}=2$ ($x=1/(2k\pi+\frac{\pi}{2}),x'=1/(2k\pi+\frac{3}{2}\pi)$ per k grande abbastanza).

---

[5]Sia $K>0$ arbitrario; per $x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$ $\sin x>\frac{1}{2}$; sia $\overline{\delta}$ tale che per $x\in(\frac{\pi}{2}-\overline{\delta},\frac{\pi}{2})$ risulti $0<\cos x<1/2K$ ($\overline{\delta}$ esiste perchè $\lim_{x\to\pi/2}\cos x=0$); definiamo $\delta_K=\min\{\frac{\pi}{6},\overline{\delta}\}$. Per $x\in(\frac{\pi}{2}-\delta_K,\frac{\pi}{2})$ è allora $\tan x>\frac{1}{2\cos x}>K$.

[6]Questo si può verificare direttamente, oppure dedurre dall'esercizio 5 (perchè $\tan x=-\tan(-x)$).

[7]Vogliamo $-\epsilon<\log x-\log x_0<\epsilon$; al centro c'è $\log(x/x_0)$; mettendo tutto ad esponente di e, moltiplicando per x_0 e poi togliendo x_0 si ottiene l'equivalente $-\delta^s\equiv-x_0(1-e^{-\epsilon})<x-x_0<x_0(e^\epsilon-1)\equiv\delta^d$, sicchè basta prendere $\delta_\epsilon=\min\{\delta^s,\delta^d\}$.

(k) $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$. Questo non siamo ancora in grado di dimostrarlo rigorosamente, ma lo vogliamo usare, quindi vediamo almeno una giustificazione. Prendiamo $x \to \infty$: sia dato $\epsilon > 0$; vogliamo x_ϵ tale che per $x > x_\epsilon$ risulti $\pi/2 - \epsilon < \arctan x < \pi/2 + \epsilon$; la seconda disugualgianza è sempre verificata; e poichè $\arctan x$ è crescente, la prima è verificata per $x > \tan(\pi/2 - \epsilon) = x_\epsilon$. [8]

Possiamo incorniciare la definizione di limite che abbiamo usato in tutti i casi visti. Per $\xi \in \mathbb{R}$ (può essere un x o un y) chiamiamo *intorno di* ξ un intervallo tipo $(\xi - \delta, \xi + \delta)$ (con $\delta > 0$); se $\xi = \infty$, con lo stesso termine indichiamo un intervallo tipo (a, ∞) con $a \in \mathbb{R}$; se $\xi = -\infty$ un intervallo tipo $(-\infty, a)$. Allora:

DEFINIZIONE. Con $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se per ogni intorno J di l esiste un intorno I_J di x_0 tale che per $x \in I_J \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in J$.

Controlla che le definizioni precedenti sono effettivamente tutte casi particolari di questa. A proposito, come per le successioni la definizione è ben posta, nel senso che: *Se il limite esiste, è unico.* La dimostrazione (in nota) è come per le successioni. [9]

Prima di andare avanti riguardiamo i risultati che abbiamo trovato sulle funzioni fondamentali: abbiamo visto i limiti di a^x per $x \to \pm\infty$, di $\log_a x$ ed x^α per $x \to \infty$ ed $x \to 0^+$ e di $x^{\pm n}$ per $x \to 0^-$, $x \to -\infty$; i limiti di $\operatorname{sen} x, \cos x$ e $\tan x$ per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ e quelli per $x \to \pm\infty$ —che non esistono; quelli di $\tan x$ per $x \to \pm\pi/2$; e quelli di $\log x$ per $x \to x_0 > 0$ (in pratica manca solo qualche limite per $x \to x_0$). Abbiamo sempre trovato quello che ci attendevamo dal grafico, e d'altra parte, alla luce dei risultati sulle successioni corrispondenti, ci saremmo stupiti del contrario. Confermeremo che *doveva* essere così nella 'conseguenza' (b) di pagina 12.

In molti degli esempi, in particolare quelli sulle funzioni fondamentali, abbiamo visto $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, che cioè il limite esiste e la funzione non ha una discontinuità, nel senso di un $f(x_0)$ 'per i fatti suoi'. In questo caso si dice appunto che f è continua in x_0. Nota che $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ se: per ogni $\epsilon > 0$ esiste δ_ϵ tale che $|x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$; non c'è "$0 < |x - x_0|$", perchè $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ è automaticamente soddisfatta in x_0. Sul concetto torneremo, perchè sulla contiuità si fondano tutti i risultati importanti del corso, dunque registriamo:

---

[8] Questa non è una dimostrazione, perchè si è assunto, ma non dimostrato, che il codominio di $\tan x$ è tutto $\mathbb{R}$ (altrimenti come potremmo essere sicuri che tutte le $x > \tan(\pi/2 - \epsilon)$ sono nel dominio di $\arctan x$?). Ripareremo questa falla.

[9] Prima escludi che possa essere contemporaneamente $f \to l \in \mathbb{R}$ ed $f \to \pm\infty$, o $f \to \infty$ ed $f \to -\infty$; poi mostra che se $f \to l$ ed $f \to l'$ con $l, l' \in \mathbb{R}$ allora per ogni $\epsilon > 0$ risulta $|l - l'| < \epsilon$ da cui $l = l'$.

DEFINIZIONE. Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in D_f$. f è continua in x_0 se $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè il limite esiste e vale $f(x_0)$. Continuità su $A \subseteq D_f$ vuol dire per ogni $x_0 \in A$.

Nota. Abbiamo sempre supposto che quando prendiamo il limite per $x \to x_0$ c'è un intorno I di x_0 tale che $I \setminus \{x_0\} \subseteq D_f$ (o per prendere $x \to x_0^+$ con $x_0 \in \mathbb{R}$ che un intorno *destro*, cioè tipo $(x_0, x_0+\delta)$, sia contenuto in D_f, e discorso analogo per $x \to x_0^-$); questo va in pratica sempre bene, ma qualcuno può chiedersi: la definizione di limite di successione, guardando la successione come una funzione con $D_f = \mathbb{N}_+$, è un caso particolare di limite di funzione? La domanda è legittima, e la risposta in effetti è no, perchè $D_f = \mathbb{N}_+$ non contiene nessun intervallo, quindi secondo la nostra definizione non si può considerare il limite di una funzione–successione, nè per $x \to x_0 \in \mathbb{R}$ (che è accettabile), nè per $x \to \infty$ (che non lo è). A questa situazione c'é un facile e naturale rimedio. Perchè l'operazione di limite per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ abbia senso non occorre che sia verificata la nostra ipotesi di partenza, ma basta: se $x_0 \in \mathbb{R}$, che ci siano punti di D_f arbitrariamente vicini ad x_0; se $x_0 = \infty$ (risp. $-\infty$), semplicemente che D_f sia illimitato superiormente (risp. inferiormente). Per tali punti possiamo modificare la definizione di limite richiedendo che per x vicino ad x_0 *ed in* D_f la f sia vicino ad l. Così per esempio per $x \to \infty$, anche se D_f non contiene nessun intervallo (a, ∞) lungo il quale x possa 'rotolare', poichè $\sup D_f = \infty$ la x può andare verso infinito saltellando lungo punti di D_f (come per le successioni). Formalmente, la condizione su x_0 che abbiamo detto è: *Ogni intorno I di x_0 ha $I \cap D_f \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$* (Tali x_0 si dicono 'punti di accumulazione' per D_f). E la definizione di limite: *Per $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ se per ogni intorno J di l esiste un intorno I_J di x_0 tale che per $x \in I_J \cap D_f \setminus \{x_0\}$ sia $f(x) \in J$.* Con questa definizione i limiti di successioni *sono* casi particolari di limiti di funzioni.

Domanda: qual è il problema se applichiamo questa definizione ad un punto che *non* è di accumulazione per D_f? [10]

APPROSSIMAZIONE AL LIMITE

Abbiamo finora verificato relazioni di limite, cioè dato l'ϵ abbiamo trovato il δ_ϵ, e così via, e qui, per i più curiosi, faremo qualche altro esercizio di questo tipo. Perchè? Quando avremo imparato a *calcolare* i limiti sarà immediato per esempio trovare che $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = 1$, ed a quel punto verrà spontaneo chiedersi: a che serve verificarlo, se lo si conosce già? La risposta è che sono due cose diverse: una cosa è sapere che $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$; ben altra è sapere quanto deve essere grande x perchè risulti per esempio $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6}$. E' evidente che quest'ultima informazione è molto più precisa della sola conoscenza del valore del limite; 'vale' di più, sicchè non ci possiamo sorprendere del fatto che in genere 'costa' di più, cioè è più difficile da ottenere. Inoltre, non tutte le informazioni hanno lo stesso valore: immagina un matematico e un suo cliente interessato al comportamento asintotico della funzione di sopra; il primo gli regala l'informazione "$\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$", ma al secondo serve $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6}$; supponi che il matematico scopra subito che $x > 1500 \Rightarrow |f(x)-1| < 3\cdot 10^{-6}$; questa è informazione che il cliente può pagare, ma supponi adesso che quest'ultimo non può aspettare fino a 1500 (pensa ad x come tempo); chiederà allora: "E prima, niente da fare?", che il matematico traduce in: "E' vera anche l'implicazione opposta, $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6} \Rightarrow x > 1500$?" La doppia implicazione vale molto più; la prima informazione diceva, "se aspetti

[10] Risposta: risulterebbe $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ per ogni $l \in \overline{\mathbb{R}}$! Quindi la definizione non sarebbe ben posta.

$x > 1500$ sarà come vuoi $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6}$, ma non è detto che non lo sia anche prima" (per esempio potrebbe essere $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6} \Leftrightarrow x > 1100$); la doppia freccia dice "per $x > 1500$, *e non prima*, risulta $|f(x) - 1| < 3 \cdot 10^{-6}$". In generale non si ottiene la doppia freccia; è già abbastanza ottenere *qualche* δ_ϵ, anche se non il migliore possibile.

I seguenti esempi sono tutti "Studia l'approssimazione del limite ... ", nel senso di: "Dato ϵ trova un δ_ϵ (o x_ϵ, o quello che è a seconda dei casi) tale che ...", eccetera. Il primo dà un'idea sul tipo di problema e su due tipiche direzioni in cui muoversi, vediamolo un momento: è $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, dunque si vuole x_ϵ tale che $x > x_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$; più piccolo è x_ϵ meglio è. Uno, si può vedere è se per qualche x_ϵ l'implicazione voluta è ovviamente vera —primo passo di (a) qui sotto. Due, si può cercare una funzione g con $|f| < |g|$ che tende pure a zero e di cui la $|g| < \epsilon$ è facile; in (a) $f = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, $g = 1/2\sqrt{x}$, ed è immediato che $|g| = g < \epsilon \Leftrightarrow x > 1/4\epsilon^2$; per tali valori sarà certamente $|f| < \epsilon$; ma è chiaro anche che non abbiamo trovato il miglior x_ϵ possibile —disegna per $x \geq 0$: una retta orizzontale ad altezza $\epsilon < 1$, f che scende convessa da 1 a zero, e g tutta sopra f convessa decrescente da ∞ a zero; l'$x_\epsilon = 1/4\epsilon^2$ trovato è il punto in cui g incontra la retta ϵ, ma il migliore possibile è quello in cui f inontra ϵ, che è più indietro.

ESEMPI. (a) Considera $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$, e supponi $\epsilon < 1$. [11] Qui $|f(x)| = f(x) = 1/(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$, sicchè con qualche passaggio facile troviamo $|f(x)| < \epsilon \Leftrightarrow 2\sqrt{x(x+1)} > \epsilon^{-2} - 1 - 2x$. Un primo risultato è allora immediato: se il secondo membro di questa è negativo la disequazione è soddisfatta, cioè: $x > (1-\epsilon^2)/2\epsilon^2 \equiv x_\epsilon \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$. Facile ma scarso; nell'esempio (g) di pagina 3 avevamo già trovato di meglio, con $x'_\epsilon = 1/4\epsilon^2 \approx x_\epsilon/2$ per ϵ sufficientemente piccolo. Se vogliamo il più piccolo $\overline{x}$ tale che $x > \overline{x} \Rightarrow |f(x)| < \epsilon$, prendiamo $x \leq x_\epsilon$ ed eleviamo al quadrato la $2\sqrt{x(x+1)} > \epsilon^{-2} - 1 - 2x$ (che con $x \leq x_\epsilon$ ha entrambi i membri positivi); otteniamo l'equivalente $x > (1-\epsilon^2)^2/4\epsilon^2 \equiv x''_\epsilon < x'_\epsilon$, che a questo punto è anche equivalente a $|f(x)| < \epsilon$. Più di questo non si può fare.

(b) $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) = 1$. Prendiamo $x > 1$; per tali valori, $|f(x) - 1| < \epsilon \Leftrightarrow \epsilon x^2 - x + 1 > 0$; quest'ultima relazione vale per ogni x se $\epsilon > 1/4$, e per $x > (1 + \sqrt{1-4\epsilon})/2\epsilon$ altrimenti (le $x < \ldots$ non ci interessano mentre $x \to \infty$). Conclusione: $|f(x)-1| < \epsilon$ vale per $x > 1 \equiv x_\epsilon$ se $\epsilon > 1/4$; vale per $x > \max\{1, (1+\sqrt{1-4\epsilon})/2\epsilon\} = (1+\sqrt{1-4\epsilon})/2\epsilon \equiv x_\epsilon$ altrimenti (vero che $(1+\sqrt{1-4\epsilon})/2\epsilon > 1$?). Qui *non* abbiamo trovato la doppia implicazione.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+|x|} = 1$. Prendi $x \geq 0$; per tali valori $|f(x) - 1| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} < \epsilon \Leftrightarrow x > \epsilon^{-1} - 1$; sicchè $x > \max\{0, \epsilon^{-1} - 1\} \equiv x_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 1| < \epsilon$. Se si analizza anche $x < 0$ ci si rende presto conto che qui siamo arrivati.

(d) Sia $x < -3$, e considera $\lim_{x\to-3^-} \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} = \infty$. Vogliamo δ_K tale che per $-3 - \delta_K < x < -3$ risulti $f(x) > K$, e supponiamo $K > 1$. $x < -3$ garantisce che sotto radice c'è un numero positivo, e $K > 1$ che la divisione per $K^2 - 1$ preserva il verso, quindi: $f(x) > K \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+3} > K^2 \Leftrightarrow x(K^2-1) + (4+3K^2) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3K^2+4}{K^2-1} = -3 - \frac{7}{K^2-1}$; allora possiamo prendere $\delta_K = \frac{7}{K^2-1}$. In questo caso abbiamo trovato la migliore approssimazione possibile.

(e) Considera $\lim_{x\to3} \frac{x-1}{x-2} = 2$, ed $\epsilon < 1$. Risolvendo troviamo (dopo un pò di lavoro) $|f(x) - 2| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{|x-3|}{|x-2|} < \epsilon \Leftrightarrow x \in (3 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}, 3 + \frac{\epsilon}{1-\epsilon})$; quindi con $\delta_\epsilon =$

[11] Come già osservato in precedenza, per quanto riguarda la validità della relazione di limite basta prendere $\epsilon < \overline{\epsilon}$ arbitrario; l'analisi dell'approssimazione potrebbe essere condotta anche, indipendentemente, per $\epsilon \geq \overline{\epsilon}$. Lo stesso dicasi per $K > \overline{K}$.

$\min\{\frac{\epsilon}{1+\epsilon}, \frac{\epsilon}{1-\epsilon}\} = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ si ha $|x-3| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$, e non esiste $\delta'_\epsilon > \delta_\epsilon$ per il quale questa implicazione resta vera: anche qui l'approssimazione trovata è la migliore possibile.

Un risultato più debole si trova più speditamente come segue. Vogliamo $\frac{|x-3|}{|x-2|} < \epsilon$; ma $|x-3| < 1/2$ implica $|x-2| > 1/2$ e dunque $\frac{|x-3|}{|x-2|} < 2|x-3|$ (in questo caso vicino ad $x = 3$ abbiamo trovato $|f(x) - l| < |g|$ con $g \to 0$ facile); sicchè $|x-3| < \min\{1/2, \epsilon/2\} = \epsilon/2 \equiv \vartheta \Rightarrow |f(x) - 2| < \epsilon$. Nota che per tutti gli $\epsilon < 1$ (quelli che stiamo prendendo in considerazione) è $\vartheta < \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$ (giusto?).

(f) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$ $(x > 0, x \neq 1; f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1})$. Consideriamo $\epsilon < 1/2$. Risolvendo le disequazioni irrazionali che vengono fuori si trova $|f(x) - \frac{1}{2}| = |\frac{1-\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})}| < \epsilon \Leftrightarrow x \in (1 - \delta^s_\epsilon, 1 + \delta^d_\epsilon)$ con $\delta^s_\epsilon = 1 - \left(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}\right)^2$, $\delta^d_\epsilon = \left(\frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon}\right)^2 - 1$; dunque il miglior risultato ottenibile è $\delta_\epsilon = \min\{\delta^s_\epsilon, \delta^d_\epsilon\}$.

Più facile: $|f(x) - 1/2| = \frac{|x-1|}{2(1+\sqrt{x})^2} < |x-1|$ (perchè il denominatore è > 1), quindi con $\vartheta_\epsilon = \epsilon$ vale la $|x-1| < \vartheta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - 1/2| < \epsilon$. Più facile, ma $\vartheta_\epsilon < \delta_\epsilon$ (qui casca l'asino). Per verificare questo si risolvano brutalmente (non è difficile come sembra) le disequazioni $\epsilon < \delta^s_\epsilon$ ed $\epsilon < \delta^d_\epsilon$ e si constati che entrambe sono vere per tutti gli $\epsilon < 1/2$ (quelli in esame).

ESERCIZI

1. Verifica che $\forall c \in \mathbb{R}$ si ha $\lim_{x\to x_0} c = c$.

2. Verifica (assumendo che il codominio di $\cos x$ è un intervallo) che $\lim_{x\to}\, 1^- \arccos x = 0$.

3. Dimostra che se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ anche $\lim_{x\to\infty}(y_0 + f(x - x_0)) = \infty$; lo stesso per $f \to -\infty$ e per $x \to -\infty$ (qui il primo passo dell'esercizio è scrivere i risultati cui si accenna!)

4. Verifica che: se $\lim_{x\to\infty} f(x) = l,\ \lim_{x\to\infty}(y_0 + f(x - x_0)) = l + y_0$; e che lo stesso vale con $-\infty$ al posto di ∞.

5. Dimostra che $\lim_{x\to -x_0^+} f(-x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ (disegna prima).

6. Un teorema dei carabinieri: se per $x > x_1$ $f(x) \geq g(x)$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, anche $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Qual è l'analogo enunciato per $x \to x_0$?

7. Scrivi un paio di casi di negazione della frase $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. In nota $x_0, l \in \mathbb{R}$ ed $x_0 \in \mathbb{R}, l = \infty$. [12]

[12] Primo caso: esiste $\epsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ esiste x con $0 < |x - x_0| < \delta$ tale che $|f(x) - l| \geq \epsilon$. Secondo: esiste K tale che per ogni $\delta > 0$ esiste x con $0 < |x - x_0| < \delta$ tale che $f(x) \leq K$.

8. 'Verifiche' (vedi paragrafo 'Approssimazione al Limite'):

$$\text{(i)} \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\infty \qquad \text{(ii)} \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1+|x|}=-1$$

$$\text{(iii)} \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{1-x}=-\infty \qquad \text{(iv)} \lim_{x\to 0} \frac{x-2}{x^2}=-\infty$$

$$\text{(v)} \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-1}=4 \qquad \text{(vi)} \lim_{x\to 0} \frac{2x+1}{x+2}=\frac{1}{2}$$

RISULTATI SUI LIMITI: I

Il risultato che ora stabiliremo consente di trasferire alle funzioni i risultati già dimostrati sui limiti delle successioni, ed altro.

PROPOSIZIONE. Siano $x_0, l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, ed (x_n) una successione con $x_n \in D_f \,\forall n$. E' $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se e solo se:

$$x_n \neq x_0 \text{ ed } \; x_n \to x_0 \;\Rightarrow\; f(x_n) \to l. \qquad (*)$$

Dim. Facciamo $x_0, l \in \mathbb{R}$. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$, è $|f(x)-l|<\epsilon$ se $0<|x-x_0|<\delta_\epsilon$; ma definitivamente è $0<|x_n-x_0|<\delta_\epsilon$ (per ipotesi), dunque anche $|f(x_n)-l|<\epsilon$. Il viceversa per contraddizione: supponiamo che *non* sia $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$. Allora c'è un $\epsilon_0>0$ tale che in ogni intorno di x_0 esiste $x \neq x_0$ con $f(x) \notin (l-\epsilon_0, l+\epsilon_0)$. Prendendo intorni di raggio $1, 1/2, \ldots, 1/n \ldots$ abbiamo allora: per ogni n esiste x_n con $0<|x_n-x_0|<1/n$ ed $|f(x_n)-l| \geq \epsilon_0$. La successione di questi x_n falsifica l'ipotesi $(*)$, perchè $x_0 \neq x_n \to x_0$ ma $f(x_n) \not\to l$. □

Nota che la condizione $x_n \neq x_0$ (basta definitivamente) è necessaria: per esempio se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l \neq f(x_0)$, la successione definita da $x_n = x_0 \,\forall n$ converge ad x_0, ma $f(x_n) \to f(x_0) \neq l$.

I risultati seguenti contengono in realtà tutto ciò che la teoria offre sui limiti. Per il loro calcolo potremo usare questi, più la conoscenza di due limiti veramente 'notevoli' ai quali molti altri possono essere ricondotti.

CONSEGUENZE. (a) *I risultati su somma e prodotto di limiti* (cioè, va sempre come ci si aspetta tranne nei casi $\infty-\infty$ e $0\cdot\infty$). Esempio, se $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ e $\lim_{x\to x_0} g(x)=m$, allora $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = l+m$ (qui $x_0, l, m \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$). Perchè: scriviamo $s(x)=f(x)+g(x)$; applicando la proposizione di sopra (parte 'solo se') ad f e g, se $x_0 \neq x_n \to x_0$ risulta $f(x_n) \to l$ e $g(x_n) \to m$; allora (somma di limiti di successioni) $s(x_n)=f(x_n)+g(x_n) \to l+m$; applicando la proposizione (parte 'se') ad s si ottiene allora il risultato.

Nota in particolare che somma e prodotto di funzioni continue in x_0 sono continue in x_0.

E' essenziale a questo punto fare *anche* la dimostrazione diretta di qualche caso di somma e prodotto. In nota ci sono, per controllare, la somma $l+\infty$ con $x_0=\infty$ e il prodotto lm con $x_0, l, m \in \mathbb{R}$. [13]

(b) *Limiti delle funzioni elementari*: esponenziali $x \mapsto a^x$ e loro inverse $x \mapsto \log_a x$, potenze $x \mapsto x^\alpha$, e trigonometriche vanno come ci si aspetta. Per esempio, possiamo affermare che per $x_0 \in \mathbb{R}$ è $\lim_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, infatti: abbiamo dimostrato che per ogni sequenza (x_n) con limite x_0 risulta $a^{x_n} \to a^{x_0}$; applicando la proposizione di sopra si ottiene il risultato. Analogamente si vede che per esempio per $x_0 = -\infty$ si ha $\lim_{x\to x_0} a^x = 0$.

Di nuovo nota la continuità: tutte le funzioni fondamentali sono continue sui rispettivi domini.

(c) I limiti dell'esempio precedente anche se al posto di x mettiamo $f(x)$. Esempio, se $f(x)>0$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ ($x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$), allora $\lim_{x\to x_0} \log f(x) = -\infty$. Perchè se $x_0 \neq x_n \to x_0$ risulta (ipotesi più 'solo se' qui sopra) $0 < f(x_n) \to 0$; ma per tale successione sappiamo che $\log f(x_n) \to -\infty$; risultato dal 'se' della proposizione. Esercizio, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ allora $\lim_{x\to x_0} a^{f(x)} = 0$.

(d) *Limiti di f^g*: per $f(x)>0$, il $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}$, per $x_0 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, va sempre come ci si aspetta —il che si vede scrivendo $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\log f(x)}$— eccetto quando ad esponente (di e) si trova un $0\cdot\infty$ (o $\infty\cdot 0$). Esempio, se $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ allora $\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = 0$. Dimostrazione: da (c) segue $\lim_{x\to\infty} \log f(x) = -\infty$; dunque (da (a)) $\lim_{x\to\infty} g(x)\log f(x) = -\infty$, da cui (usando (c) di nuovo) $\lim_{x\to\infty} e^{g(x)\log f(x)} = 0$.

In altre parole: se $f\to l$ e $g \to m$, $l, m \in \mathbb{R}$ abbiamo $f^g \to l^m$, e analogo passaggio al limite si può fare se l, m non sono finiti purchè $g\log f$ non sia $0\cdot\infty$ o $\infty\cdot 0$. Quando si verificano gli ultimi due casi? Il primo è con $m=0$ e $\log f \to \pm\infty$, che si verifica se $f\to 0$ oppure $f\to\infty$; il secondo è con $m=\pm\infty$ e $\log f \to 0$, cioè $l=1$; dunque i casi scoperti (indeterminati) sono: "0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$".

(e) *Per $x\to\infty$, a^x ($a>1$) va a infinito "più veloce di" qualunque potenza di x:*

$$\text{Per } a>1, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^k} = \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

[13]Somma: l'ipotesi è che $\lim_{x\to\infty} f = l$, $\lim_{x\to\infty} g = \infty$. Sia K arbitrario; esistono x_1, x_2 tali che $f > l-1$ per $x > x_1$ e $g > K-(l-1)$ per $x > x_2$; per $x > \max\{x_1, x_2\} = x_K$ sarà allora $f+g > K$.

Prodotto: l'ipotesi è che $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$. Allora dato ϵ: per $x \in I_1 \setminus \{x_0\}$, $|g(x)-m| < \epsilon/2l$, da cui anche $|g(x)| < |m| + \epsilon/2l \equiv M$; per $x \in I_2 \setminus \{x_0\}$, $|f(x)-l| < \epsilon/2M$; dunque per $x \in I_1 \cap I_2 \setminus \{x_0\}$, $|fg-lm| = |fg-lg+lg-lm| \le |g|\cdot|f-l| + l|g-m| < \epsilon$.

Nota che dicendo f va a infinito 'più veloce' di g intendiamo che il rapporto f/g va a infinito, cioè che f diventa infinitamente più grande di g; per esempio $2x$ non va più veloce di x, perchè il rapporto è sempre 2; x^2 invece sì. Per verificare il limite, anche qui non dobbiamo fare altro che applicare il risultato sulle successioni, che se $x_n \to \infty$ allora $a^{x_n}/x_n^k \to \infty$, e poi il 'se' della proposizione qui sopra.

Più in generale, se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ allora $\lim_{x\to x_0} a^{f(x)}/f(x)^k = \infty$, perchè: da $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ e 'solo se' di sopra deduciamo che per $x_n \to x_0$ si ha $f(x_n) \to \infty$, da cui (risultato sulle successioni) $a^{f(x_n)}/f(x_n)^k \to \infty$; ora il risultato voluto segue dal 'se' della proposizione di sopra.

(f) *Per $x \to \infty$ il logaritmo va a infinito "più lento" di tutte le potenze di x:* [14]

$$\text{Per } a > 1, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^{(1/k)}} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_+.$$

Ponendo $h(x) = \log_a x$ abbiamo $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$ e $\log_a x/x^{(1/k)} = h(x)/(a^{1/k})^{h(x)}$; ed $a^{1/k} > 1$ poichè $a > 1$; dall'esempio precedente (prendendo l'inverso) segue allora il risultato.

Da (e) ed (f) viene fuori questo quadro: per $x \to \infty$, il log è più lento di tutte le x^α con $\alpha > 0$, queste vanno più veloci quanto maggiore è α, e tutte sono più lente di a^x (con $a > 1$).

ESEMPI ED ESERCIZI: I

Cominciamo adesso a vedere questi risultati 'in azione' nel calcolo di limiti che si trovano per continuità, con razionalizzazioni, dividendo numeratore e denominatore per uno stesso numero, aggiungendo e togliendo qualcosa, usando formule per $a^n - b^n$ e cose simili. La cosa notevole è che molti altri limiti si trovano riconducendoli a due limiti particolari ('notevoli' appunto). Devi, specialmente all'inizio, accertarti di sapere quale risultato si sta usando in ogni passaggio.

ESEMPI. (a) Studiamo $\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ al variare di n ed a_n. L'idea è che x^n diventa infinitamente più grande di tutti gli altri termini, quindi 'conta solo lui'; per farlo uscire lo mettiamo in evidenza, ottenendo $f = x^n \cdot (a_n + a_{n-1}/x + \ldots + a_1/x^{n-1} + a_0/x^n)$; la funzione in parentesi tende ad $a_n \neq 0$, ed $x^n \to \pm\infty$ (a seconda se $x \to \pm\infty$ e se n è pari o dispari); dunque prodotto di limiti (in $\overline{\mathbb{R}}$), risultato ∞ o $-\infty$ (per esempio se $x \to -\infty$, $a_n < 0$ ed n è pari risulta $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$, ecc.).

Da somma limiti sappiamo che per $x_0 \in \mathbb{R}$, per ogni polinomio $P(x)$ risulta $\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$, che cioè i polinomi sono funzioni continue su tutto $\mathbb{R}$ (giusto?).

[14] Qui e nel precedente diciamo 'tutte' le potenze, ma i risultati contemplano solo k e $1/k$, $k \in \mathbb{N}_+$; estendili con maggiorazioni a esponenti arbitrari.

(b) $\lim_{x\to\infty} \log \dfrac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt[3]{x}+1}$. Basta vedere che fa la frazione (conseguenza (c)): in evidenza sopra $x^{1/2}$ e sotto $x^{1/3}$, resta $x^{1/6}$ moltiplicato una frazione che tende a $1/2$; dunque la frazione tende a infinito, e con essa il suo logaritmo.

(c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-4x}{-x^4+2}$. In evidenza quello che conta, x^3 sopra e x^4 sotto, resta $f = \frac{1}{x}\big(\frac{1-4/x^2}{-1+2/x^4}\big) \to 0\cdot(-1) = 0$ (stiamo usando la freccia, è chiaro che si intende "per $x \to -\infty$").

(d) $\lim_{x\to-1} \dfrac{1}{2x^3+2x^2-3x-3}$. Il denominatore è un polinomio che si annulla in $x=-1$, e possiamo usare il seguente fatto:

Sia $P(x_0) = 0$, con $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; allora $P(x) = (x-x_0)Q(x)$ con Q polinomio di grado $n-1$. [15]

Dividendo il nostro denominatore per $x+1$ otteniamo $2x^3+2x^2-3x-3 = (x+1)(2x^2-3)$; $\lim_{x\to-1}(2x^2-3) = -1 < 0$, dunque: $\lim_{x\to-1^{\mp}} f(x) = \pm\infty$ (terzo esercizio qui sotto), sicchè il limite per $x\to-1$ non esiste. C'è un 'asintoto verticale', e quando il numeratore *non* tende a zero e il denominatore è un polinomio che tende a zero ce lo aspettiamo sempre.

(e) $\lim_{x\to0} \frac{x+4x^4}{x^2-2x^3}$. Qui numeratore e denominatore tendono entrambi a zero. Mettiamo in evidenza x elevato all'esponente *minimo* sopra e sotto, ottenendo $1/x$ per una frazione che tende ad 1; conclusione, il limite non esiste.

(f) $\lim_{x\to1}\Big(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\Big)$. Qui (usando $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$) troviamo $f(x) = \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -\frac{(x+2)}{1+x+x^2} \to -1$.

(g) $\lim_{x\to-\infty} x^5(2\operatorname{sen} x + \cos x - 5)$. La funzione in parentesi forse non ha limite, ma è sempre $< -2 < 0$; inoltre, esiste x_0 tale che per $x < x_0$ risulta $x^5 < -K/2$; dunque per tali x è $f(x) > K$, e il limite è ∞.

(h) $\lim_{x\to0^+}(x+x^2)^{1/x^2}$. Scrivendolo come $e^{g\cdot\log f}$ si vede subito che l'esponente tende a $\infty\cdot(-\infty) = -\infty$, quindi il limite vale 0.

(i) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$. Moltiplica e dividi sopra per $1+\operatorname{sen} 2x$ e sotto per $\operatorname{sen} x + \cos x$, ottenendo $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x+\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos^2 2x}{-\cos 2x} \to 0$.

(j) $\lim_{x\to0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot\log(x+1)$. Funzione limitata moltiplicata per funzione infinitesima: limite 0.

(k) $\lim_{x\to3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$. A numeratore $a-b$, ed $a^2-b^2 = -4(x-3)$; a denominatore c'è $(x-1)(x-3)$; conclusione, $-1/3$.

[15] Dim. Per $x \neq x_0$, la divisione $P(x)/(x-x_0)$ dà $P(x) = (x-x_0)Q(x) + r$ con $r \in \mathbb{R}$. Facendo i limiti per $x \to x_0$ di entrambi i membri si ottiene $P(x_0) = r$.

(l) Anche le *inverse* delle funzioni circolari (arcsen, arccos, arctan) sono continue sui rispettivi domini. Anche questo non siamo ancora in grado di dimostrarlo rigorosamente, ma siccome lo vogliamo usare vediamo almeno una 'giustificazione' del risultato: facciamo $\lim_{x\to x_0} \arctan x = \arctan x_0$. Sia dato $\epsilon > 0$, e sia $y_0 = \arctan x_0$ (nota $\tan y_0 = x_0$); poichè $\arctan x$ è crescente, per $x \in (\tan(y_0 - \epsilon), \tan(y_0 + \epsilon))$ è $y_0 - \epsilon < \arctan x < y_0 + \epsilon$; dunque basta prendere $\delta_\epsilon = \min\{x_0 - \tan(y_0 - \epsilon), \tan(y_0 + \epsilon) - x_0\}$. [16]

A questo punto puoi fare gli esempi 4.9 del libro.

ESERCIZI 4.1

Aggiungiamo un paio di esercizi di teoria e altri limiti.

9. Ricorda che una successione convergente è limitata. Ora supponi che $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$. E' f necessariamente limitata? No; disegna un controesempio. Cosa secondo te fa la differenza?

10. Dimostra la Proposizione 4.6 (p.198).

11. (i) Dimostra che $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ implica $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
(ii) Supponi che $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$; dimostra che se $f(x) > 0$ allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \infty$, e che se $f(x) < 0$ allora $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

12. Calcola $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^5-3x+1}{x^2+x+2}$ (di questi quando se ne fa uno si sono fatti tutti).

13. Dì se esistono $\lim_{x\to 1} \frac{x-5}{(x-1)(x-3)}$ e $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x}$.

14. Dì se esistono $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2-2x}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{x^5-x^3}{x^4-3x}$.

15. Calcola, se esiste:

$$(i)\ \lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1} \qquad (ii)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{2x+1}$$

$$(iii)\ \lim_{x\to \infty} \frac{e^x}{e^x-1} \qquad (iv)\ \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$(v)\ \lim_{x\to \infty} \frac{[x]}{x} \qquad (vi)\ \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen} x + 3\cos x}{x - \cos x}$$

$$(vii)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{4}^+} \frac{x - \tan 2x}{x - \tan x} \qquad (viii)\ \lim_{x\to \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

[16] Di nuovo, il 'buco' in questa argomentazione è che abbiamo dato per scontato che il codominio della tangente è un intervallo (se no come potremmo essere sicuri che ogni $x \in (\tan(y_0 - \epsilon), \tan(y_0 + \epsilon))$ è nel dominio di $\arctan x$? Disegna l'inversa di una funzione monotona ma *non* continua in x_0 per capire qual è il problema). Dimostreremo che il codominio di *qualunque* funzione continua (come la tangente) è un intervallo.

$(ix)\ \lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ $\qquad (x)\ \lim_{x\to 2}\dfrac{3-\sqrt{5x-1}}{x^2-4}$

$(xi)\ \lim_{x\to\infty} x+\sqrt[3]{1-x^3}$ $\qquad (xii)\ \lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2+4x+3}$

$(xiii)\ \lim_{x\to-\infty} x^2\arctan x$ $\qquad (xiv)\ \lim_{x\to 1^-}\dfrac{1}{\arccos x}$

$(xv)\ \lim_{x\to-\infty}\dfrac{1+\arctan x}{\pi+2\arctan x}$

Suggerimenti. (ii) ricorda che per $x<0$ è $\sqrt{x}=-x$; (v) usa carabinieri; (ix) ricorda $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$; (xi) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$; (xii) vedi (ii); (xiv) ricorda (esercizio 2 pag.10) che $\lim_{x\to 1^-}\arccos x=0$, e concludi dal segno di $\arccos x$.

16. Questi sono f^g:

$(i)\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$ $\qquad (ii)\ \lim_{x\to 0^+}(1-\cos x)^{1-\ln x}$

$(iii)\ \lim_{x\to 1^-}(1-\sqrt{x})^{\frac{1}{x-1}}$ $\qquad (iv)\ \lim_{x\to-\infty} e^{\operatorname{sen} x/x}$

$(v)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\ln x}$ $\qquad (vi)\ \lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

$(vii)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)^{\tan x}$

17. Fatti un'idea del grafico di $\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ sulla base dei limiti per $x\to 1,3,\pm\infty$; e di quello di $\frac{x^2-1}{x^3-4x^2+4x}$ dai limiti per $x\to 0,2,\pm\infty$.

18. (Barozzi-Corradi) Discuti al variare di a (maggiore di zero diverso da 1) il limite $\lim_{x\to a^+}\frac{\log_a(x-a)}{\log_a x-1}$

RISULTATI SUI LIMITI: II

La seguente proposizione regola il 'cambio di variabile', che nei limiti è (quasi) tutto. Dice: se per x vicino ad x_0 è $g(x)$ vicino a z_0 e per z vicino a z_0 è f vicino ad l, allora per x vicino ad x_0 sarà f vicino ad l. Con $I(\xi)$ (o $J(\xi)$) indicheremo un intorno di ξ (cioè un $(\xi-\delta,\xi+\delta)$ se $\xi\in\mathbb{R}$, (a,∞) se $\xi=\infty$, $(-\infty,a)$ se $\xi=-\infty$).

PROPOSIZIONE (Limiti Funzioni Composte, LFC). Siano x_0, z_0 reali o $\pm\infty$. Se $\lim_{x\to x_0} g(x)=z_0$ ed esiste $\lim_{z\to z_0} f(z)\in\overline{\mathbb{R}}$, allora

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{z\to z_0} f(z)$$

purchè si verifichi almeno una delle seguenti condizioni:

(1) $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$;
(2) esiste $I(x_0)$ tale che per ogni $x\in I(x_0)\setminus\{x_0\}$ si ha $g(x)\neq z_0$.

Dim. Usiamo la condizione 2, a te l'altra. Sia $l=\lim_{z\to z_0} f(z)$, e sia dato un intorno $J(l)$ di l; le ipotesi implicano che esiste $I(z_0)$ tale che per $z \in I(z_0) \setminus \{z_0\}$ è $f(z) \in J(l)$, ed un $I(x_0)$ tale che per $x \in I(x_0) \setminus \{x_0\}$ è $g(x) \in I(z_0) \setminus \{z_0\}$; per tali x sarà allora $f(g(x)) \in J(l)$. $\square$

Nota. La condizione (ii) è automaticamente verificata se $z_0 = \pm\infty$; altrimenti, una condizione sufficiente spesso facile da vedere è che $z = g(x)$ sia strettamente monotona in un $I(x_0) \setminus \{x_0\}$.

I **limiti notevoli** sono i due seguenti:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \qquad (ii)\ \lim_{x\to\pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Il primo ha per compagno $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ che si ottiene da (i) moltiplicando e dividendo per $1+\cos x$. Il secondo può riscriversi cambiando variabili come:

$$(iia)\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad (iib)\ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

((iia): con $z = 1/x \to \pm\infty$ la funzione è il ln di quella in (ii); poi usa LFC. (iib): prendi $z = e^x - 1 \to 0$ e usa (iia)).

Per verificare (i) e (ii) non resta molto lavoro. Una verifica di (i) è: prendi $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$, così $|\operatorname{sen} x| < |x| < |\tan x|$; e dividi per $|\operatorname{sen} x|$ racchiudendo $x/\operatorname{sen} x$ fra due funzioni che tendono ad 1. Per (ii), cominciando da $x \to \infty$ osserva che ($[x]$ parte intera di x)

$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

e che le due funzioni che chiudono f tendono entrambe ad e (per $x \to \infty$, $[x]$ descrive $\mathbb{N}$, $[x] = 1, 2\ldots$). Per $x \to -\infty$, con $z = -x \to \infty$ scrivi

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1-\frac{1}{z}\right)^{-z} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^z = \left(1+\frac{1}{z-1}\right)^z,$$

che tende ad e.

ESEMPI ED ESERCIZI: II

Qualche consiglio, perchè i vecchi non possono fare a meno di darne. Primo ricordati degli amici: $f+g$, $f \cdot g$ ed $f^g = e^{g \log f}$ vanno come vuoi, se non ci sono $\infty - \infty$ o $0 \cdot \infty$; $f \circ g$ con f fondamentale non tradisce mai; e se arrivi a un limite notevole sei a casa. Poi, pronto a riscrivere la funzione data: levando 'problemi' con moltiplicazioni e divisioni, aggiungendo e togliendo, prendendo archi complementari nelle trigonometriche, eccetera, sperando che il prezzo da pagare sia basso; e/o cercando la variabile 'giusta' (che spesso risolve). Infine, a volte non resta che tentare uno 'schiacciamento' (carabinieri).

ESEMPI. **(a)** $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$. Moltiplica e dividi sopra per x^2, sotto per x; resta x per una frazione che tende a $1/2$, dunque il limite vale 0.

(b) $\lim_{x\to\pm\infty}\bigl(1+\frac{\alpha}{x}\bigr)^x$. Dentro parentesi vogliamo "1 su...", quindi scriviamo $\alpha/x = 1/(x/\alpha)$; chiaramente la variabile da considerare è adesso $z = x/\alpha \to \pm\infty$ (con direzione opposta ad x se $\alpha < 0$); ad esponente vogliamo allora z, e lo otteniamo moltiplicando e dividendo per α; dunque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{z\to\pm\infty}\bigl((1+1/z)^z\bigr)^\alpha = e^\alpha$, usando la conseguenza (c) di sopra.

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. sotto c'è $z = x-1 \to 0$, e sopra $1+z$; sappiamo allora dal limite notevole (iia) che anche il nostro vale 1. Questo, e possibilmente anche il prossimo, non è male ricordarlo.

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$. Usiamo l'esempio precedente: sopra abbiamo uno $z-1$ con $z = (1+x)^\alpha \to 1$; se sotto ci fosse $\log z$ saremmo a casa, e ce lo mettiamo, 'pagando' una moltiplicazione per $\log(1+x)^\alpha = \alpha\log(1+x)$, che però resta diviso per x col quale va ad 1; risultato: $\lim_{x\to 0} f(x) = \alpha \cdot \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{\log z}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \alpha$.

(e) $\lim_{x\to 0^+} x\log x$. Questo è importante. $f(x) = -\frac{\log(1/x)}{1/x}$, e $z = 1/x \to \infty$; dunque $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\lim_{z\to\infty}\frac{\log z}{z} = 0$.

Analogamente si vede che per ogni $\alpha > 0$ è $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$.

(f) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{\log x} - \frac{1}{2}\log x$. Prendi $z = \log x \to \infty$, trovando $\lim_{x\to\infty} f = \lim_{z\to\infty}\sqrt{z} - \frac{1}{2}z = -\infty$ (mettendo in evidenza $\sqrt{z}$).

(g) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

(h) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arcsen} x}{x}$. Per $x \to 0$, $z = \operatorname{arcsen} x \to 0$ monotona, ed $x = \operatorname{sen} z$; da LFC $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{z\to 0} z/\operatorname{sen} z = 1$.

(i) $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi}{2}x$. Per $x\to 1$, $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x \to 1$ senza problemi; e $\cos\alpha = \operatorname{sen}(\pi/2-\alpha)$, dunque $\cos\frac{\pi}{2}x = \operatorname{sen}(\pi/2 - \frac{\pi}{2}x) = \operatorname{sen}(1-x)\frac{\pi}{2}$; allora prendiamo $z = (1-x)\frac{\pi}{2} \to 0$, e moltiplicando e dividendo per $\frac{\pi}{2}$ otteniamo $\lim_{x\to 1} f(x) = 2/\pi$.

(j) $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-}(x+\frac{\pi}{2})\tan x$. Prendi $z = x+\frac{\pi}{2} \to 0^-$ e osserva che $\tan x = -1/\tan(x+\frac{\pi}{2})$, così $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f = -\lim_{z\to 0^-} z/\tan z = -1$.

(k) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{\operatorname{sen} 4x}$. $\operatorname{sen} 4x = 2\operatorname{sen} 2x\cos 2x$, e il problema è $\cos 2x$; ma questo lo otteniamo, cambiato di segno, al numeratore moltiplicando e dividendo per $\operatorname{sen} x + \cos x$; dopo le semplificazioni il limite è facile, e vale $-1/2\sqrt{2}$.

(l) (Di Bari–Vetro) $\lim_{x\to 0^+}\log x\cdot\log(1+x^3)$. Moltiplica e dividi per x^3 e applica l'esempio (e): il limite è 0.

(m) (Picone–Fichera) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x} \cdot \log\bigl(x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\bigr)$. Funzione limitata per funzione infinitesima: limite 0.

(n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{x}$. Qui moltiplicando ecc. non si arriva a niente, ma ciò non può sorprendere perchè stiamo cercando di andare *più a fondo* su $\operatorname{sen} x/x$; che tende ad uno va bene, ma qui ci stiamo chiedendo a che velocità: $1 - \operatorname{sen} x/x$ va a zero più veloce di x, uguale, o più lento? Dobbiamo usare confronto. Prendiamo $0 < |x| < \pi/2$, così è $1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$; da questo ricaviamo $0 < 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 - \cos x$; moltiplicando per $1/|x| = |x|/x^2$ viene

$$0 < \left|\frac{1}{x} \cdot \left(1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\right| < |x| \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2};$$

la funzione a destra tende a zero, e in mezzo c'è $|f|$: possiamo concludere che il limite vale zero. Dunque per $x \to 0$, $1 - \operatorname{sen} x/x$ diventa infinitamente più piccolo di x, cioè va a zero più veloce.

ESERCIZI 4.2

Al solito aggiungiamo qualche limite.

1. Questi con il primo limite notevole.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x + \operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos \alpha x}$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\tan x}$ $(viii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{x}$

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\alpha + x) - \operatorname{sen}(\alpha - x)}{x}$ (x) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{(x-1)^3}$

(xi) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (x - \frac{\pi}{2}) \tan x$

2. Questi con il secondo.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$ (ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{e^x - 1}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1)$ (iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x}$ (vi) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{e^{\sqrt{x-1}} - 1}{x - 1}$ $(viii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x}$

(ix) $\lim_{x\to\infty} x(\ln(x+1)-\ln x)$ (x) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{2x}}{x}$

(xi) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+\operatorname{sen} x)^2 - 1}{x}$ (xii) $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h}$

3. Altri misti, da calcolare se esistono.

(i) $\lim_{x\to 0} [\cos x]$ (ii) $\lim_{x\to 0} x^2 \tan^4(\frac{\pi}{2} - x)$

(iii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \sqrt[4]{1+x} - 1}{x + \arctan x}$ (iv) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)}{x}$

(v) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$ (vi) $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\ln(1+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x^2-1}}$

(vii) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(3x^2+2)}{x}$ $(viii)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(ix) $\lim_{x\to\infty} x \operatorname{sen}(\pi - \frac{1}{x})$ (x) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{(x+1)x\ln x + (3^x - 1)\tan x}{\arctan x - x \operatorname{sen} x}$

(xi) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5^x}{x^4 - 3x^3 + 2x - 1}$ (xii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x + \arctan x}{\ln(1+x) + 3^x - 1}$

$(xiii)$ $\lim_{x\to 0} x + (x - [x])^2$ (xiv) $\lim_{x\to\infty} e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x^2-1}}$

(xv) $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}} \arctan x$ (xvi) $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$(xvii)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ $(xviii)$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\frac{1-\cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x}$

Per l'(viii) ricorda $(x/y)^\alpha = x^\alpha/y^\alpha$. Nel (xiii) fai separatamente da destra e sinistra. Nel (xvi) nota che $1 - \cos x \to 0$. Per gli ultimi due usa il risultato dell'ultimo esempio sopra. Valori dei limiti in nota. [17]

4. Altri due, con suggerimento di guardare fra gli esercizi di 'Geometria' (soluzioni in nota [18])

(i) $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x + \arctan\frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}$ (ii) $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x + \arctan\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}}$

[17] (i) 0; (ii) ∞; (iii) 5/8, dividendo per x; (iv) 1; (v) 3; (vi) $1/\sqrt{2}$; (vii) 0; (viii) 1; (ix) 1; (x) $-\infty$, dividendo per x; (xi) ∞; (xii) $2/(1+\log 3)$; (xiii) $\lim_{x\to 0^+} f = 0 \neq \lim_{x\to 0^-} f = 1$; (xiv) $-\infty$; (xv) -1; (xvi) $1/\sqrt{e}$; (xvii) e (xviii) 0.

[18] Da uno degli esercizi di 'Geometria' sappiamo che $\arctan x + \arctan 1/x = \pm\pi/2$ aseconda che $x \gtrless 0$; allora, (i): prendi $x \in (0, \pi/2)$, così $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{x\to 0^+} x/(x - \arctan x) = \infty$ perchè $\lim_{x\to 0} \arctan x/x = 1$ ed $\arctan x < x$ (a sua volta perchè $x < \tan x$); (ii): prendi $x \in (-\pi/2, 0)$, così $\lim_{x\to 0^-} f = \lim_{x\to 0^+} x/(x - \arctan x) = \infty$ perchè $\lim_{x\to 0} \arctan x/x = 1$, $\arctan x > x$ (a sua volta perchè $x > \tan x$), e qui il numeratore è negativo.