Il Problema della Segretaria

Teoria delle Decisioni, Aprile 2001 (S Modica)

1 Il Problema

È un problema di optimal stopping, nel senso che ci sono osservazioni sequenziali e ad ogni stadio si decide se fermarsi o continuare; troncato ad n, perchè dopo l'n–esima osservazione ci si ferma in ogni caso. Specificamente, il problema è il seguente. Si deve scegliere un oggetto fra n —'una segretaria', un collaboratore, un partner, un quadro, quello che vuoi. Gli oggetti, che arrivano in ordine 'casuale', vengono osservati a costo zero sequenzialmente uno alla volta, e all'osservazione r–esima, $r = 1, 2, \ldots, n-1$, dopo aver valutato le preferenze sugli oggetti osservati, si può: o accettare *l'oggetto appena osservato*, oppure scartarlo e passare all'osservazione $r+1$ (nota che dunque non si può, dopo l'osservazione r, decidere per un oggetto precedentemente osservato e scartato — ogni lasciata è perduta); all'osservazione n–esima si deve necessariamente accettare. Il problema è di trovare una regola di arresto che massimizzi l'utilità attesa della scelta. Il trade–off è: se accetti troppo presto non vedi i migliori; ma se vai troppo avanti, magari i migliori li hai rifiutati e perduti per strada.

2 Formalizzazione

Fatta l'r–esima osservazione il decisore valuta le sue preferenze sugli oggetti osservati, classificando l'ultimo osservato al posto $c = 1, 2, \ldots, r$ ($c = 1$ se è il migliore, e così via). Data la posizione c dell'ultimo osservato, il resto della classifica parziale è irrilevante, perchè gli altri oggetti non possono più essere scelti. Dunque fatta l'r–esima osservazione il decisore si trova in uno stato (nodo) che possiamo descrivere con la coppia (c, r).

Se al nodo (c, r) il decisore non accetta, passa ad un nodo $(c', r+1)$; che distribuzione di probabilità avrà $c' = 1, 2, \ldots, r+1$? Per rispondere a questa domanda dobbiamo individuare lo spazio di probabilità sottostante al problema; nella nostra situazione, il caso determina il modo in cui si dispone la graduatoria nelle n osservazioni. Per esempio supponiamo $n = 3$; una possibile realizzazione è allora $(2, 1, 3)$, che vuol dire: prima arriva il medio, poi il migliore, per ultimo il peggiore; e le altre possibilità sono le altre permutazioni dei numeri $1, 2, 3$, con interpretazioni analoghe. Tornando al caso generale, lo spazio rilevante è dunque l'insieme Π delle $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \ldots, n$; e su Π stiamo assumendo probabilità P uniforme: $P(\pi) = 1/n!$ per ogni $\pi \in \Pi$. Dato ciò segue che anche i nodi $(c', r+1)$, $c' = 1, 2, \ldots, r+1$ hanno probabilità uniforme, cioè uguale ad $1/(r+1)$ per tutti. Questo dovrebbe essere intuitivamente chiaro; per formalizzarlo ci vorrebbbe un pò di notazione pesantuccia sulle permutazioni, che ci risparmiamo.

Passando all'utilità: nota che se il decisore accetta al passo $r < n$, poichè non osserva gli $n - r$ rimanenti, non saprà con certezza la posizione dell'oggetto scelto nella graduatoria di *tutti* gli n oggetti. Immagina per esempio la seguente situazione: $n = 10$; il decisore osserva il primo oggetto e lo scarta; osserva il secondo, lo valuta migliore del primo e lo accetta; in questo caso, fra i due osservati quello scelto è primo, ma nell'insieme degli 10 oggetti esistenti potrebbe anche essere nono! (in termini dello spazio Π, stiamo considerando l'insieme delle permutazioni 'compatibili' con l'ordine parziale delle prime r osservazioni). D'altra parte a guidare la scelta deve essere la posizione (attesa) del candidato nella graduatoria complessiva. Formalmente, sia $i = 1, 2, \ldots, n$ la posizione dell'oggetto scelto fra *tutti* gli n nelle preferenze del decisore; l'utilità di quest'ultimo dipenderà allora da i, e la indicheremo con $u(i)$. Ovviamente $u(1) \geq u(2) \geq \cdots \geq u(n)$.

Per finire: il decisore deve scegliere una regola di arresto che massimizzi l'utilità attesa della scelta. Più precisamente: una regola di arresto t può essere descritta nel nostro caso come una funzione $(c, r) \mapsto t(c, r) \in \{\text{Accetto}, \text{Continuo}\}$. Una tale t, insieme alla P su Π, determina una distribuzione su i e quindi su $u(i)$. Rispetto a questa distribuzione si considera il valore atteso di $u(i)$. Chiaramente per risolvere un caso concreto dovremo specificare una precisa (e semplice!) u.

3 Induzione all'indietro

Intanto osserviamo che siamo di fronte ad un problema finito, quindi lo potremmo dare al calcolatore e farlo risolvere a lui. È comunque più divertente pensarci: possiamo applicare l'induzione all'indietro, che qui è di casa. Indichiamo con $u_s(c, r)$ l'utilità attesa di accettare al nodo (c, r) e con $v(c, r)$ il valore del nodo (in Piccinato sez. 1.8 è ρ). Allora la optimality equation è

$$\begin{aligned} & v(c,r) = \max\left\{u_s(c,r),\, (r+1)^{-1} \sum\nolimits_{c'=1}^{r+1} v(c', r+1)\right\}, \qquad \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots, n-1, \\ c = 1, 2, \ldots, r, \end{array} \\ & v(c,n) = u_s(c,n) = u(c)\,, \quad c = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Troveremo v in un caso specifico qui di sotto, ma intanto calcoliamo $u_s(c, r)$. Dobbiamo vedere che valori può assumere i dato (c, r), e con che probabilità. Il range di i: l'oggetto si è classificato c–esimo fra gli r osservati; il meglio che gli può capitare è che gli $n - r$ non osservati gli restano tutti sotto, nel qual caso $i = c$; alla peggio gli stanno tutti sopra, e scende al posto $i = c + n - r$. Probabilità: (ricorda che P è uniforme) sul totale degli $\binom{n}{r}$ stati (=arrivi=permutazioni), in quali l'oggetto scende al posto i? Deve succedere che gli $r - c$ oggetti che gli stanno sotto fra gli r si sistemano nelle ultime $n - i$ posizioni ($\binom{n-i}{r-c}$ casi), e che allo stesso tempo i $c - 1$ che gli stanno sopra (di nuovo fra gli r) si assestano nelle prime $i - 1$ posizioni ($\binom{i-1}{c-1}$ casi). Conclusione:

$$u_s(c,r) = \sum\nolimits_{i=c}^{c+n-r} u(i) \cdot \frac{\binom{n-i}{r-c}\binom{i-1}{c-1}}{\binom{n}{r}}. \tag{1}$$

4 Soluzione con u tutto–o–niente

Prendiamo la u più semplice ed estrema che ci sia:

$$u(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i = 2, 3, \ldots, n\,. \end{cases}$$

Non vorrei essere nei suoi panni: se non prende il migliore non conclude niente; ma non può semplicemente 'prendere il migliore'; *qualunque* cosa faccia, gli può scappare.

Vediamo che strategia deve seguire per massimizzare l'utilità attesa. La semplificazione cruciale è che, come si verifica facilmente, la (1) diventa

$$u_s(c,r) = \begin{cases} r/n & c = 1 \\ 0 & c = 2, 3, \ldots, r\,. \end{cases} \tag{2}$$

Risolviamo subito il caso $n = 2$ direttamente dalla optimality equation. [0,1]

E veniamo al caso $n > 2$. Dalla (2) si vede subito che almeno, il valore di ogni nodo è positivo; in effetti possiamo facilmente verificare che

$$v(c,r) \geq 1/n \quad \forall (c,r),\, r < n. \text{ }^{2} \tag{3}$$

E da questo deduciamo attraverso l'equazione di ottimalità che ad ogni passo $r < n$, se $c \neq 1$ si passa avanti:

$$v(c,r) > u_s(c,r) \quad r = 1, 2, \ldots, n-1,\, c = 2, 3, \ldots, r. \tag{4}$$

La seconda considerazione che possiamo fare è che intuitivamente, trovare un $c = 1$ ha più valore quanto più grande r; dunque congetturiamo che se rifiuti il migliore fra r, lo devi rifiutare anche fra $r' < r$; formalmente:

$$\text{Se } \ v(1,r) > u_s(1,r), \text{ allora } \ v(1,r') > u_s(1,r')\ \forall r' < r \leq n-1. \tag{5}$$

Basta dimostrarlo per $r' = r - 1$, perchè poi per $r' = r - k$ basta applicare k volte il risultato valido per $r-1$; e per $r' = r-1$ la dimostrazione usando le optimality equations rilevanti non è difficile; prova a farla, e *dopo* guarda la nota. [3]

Le proprietà (4) e (5) ci mettono già in grado di indovinare la *forma* della strategia ottima; scrivila, poi controlla il seguito. Ponendo

$$r^\star \ = \max\{r \mid v(1,r) > u_s(1,r)\},$$

la strategia ottima è la seguente:

Rifiuta i primi $r^\star$ oggetti; ai nodi (c,r) con $r^\star < r < n$, acccetta solo se $c = 1$.

Dobbiamo verificare che l'insieme scritto sopra non è vuoto (a rigor di logica lo dovevamo fare prima); dimostriamo che contiene $r = 1$. [4]

Resta da trovare $r^\star$. Intanto verifichiamo che $r^\star < n - 1$ (cioè che al nodo $(1, n-1)$ ti conviene accettare). [5] Ora supponi che ai nodi $(1, r')$ con $r' > r$ accetti, e considera il nodo $(1, r)$: se rifiuti, al passo $r + 1$ accetterai e prenderai $(r + 1)/n$ se $c = 1$, altrimenti rifiuterai, e al nodo successivo si ripresenterà la stessa situazione, fino ad $r = n-1$, dove al passo successivo devi accettare in ogni caso (prendendo 1 con probabilità $1/n$, zero altrimenti). Dunque il valore di rifiutare ad $(1, r)$ è:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r+1}\sum\nolimits_{c=1}^{r+1} v(c, r+1) &= \frac{1}{r+1}\frac{r+1}{n} + \frac{r}{r+1}\frac{1}{r+2}\sum\nolimits_{c=1}^{r+2} v(c, r+2) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{r}{r+1}\left(\frac{1}{n} + \frac{r+1}{r+2}\frac{1}{r+3}\sum\nolimits_{c=1}^{r+3} v(c, r+3)\right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\frac{r}{r+1} + \frac{1}{n}\frac{r}{r+2} + \cdots + \frac{r}{n-1}\frac{1}{n} \\
&= \frac{r}{n}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r}\right).
\end{aligned}$$

[0] Le soluzioni e dimostrazioncine sono nelle note da 1 a 6, che non sono incluse nel file.

Dunque se da $r+1$ in poi accetti $c=1$, ad $(1,r)$ accetti (e prendi r/n) se e solo se

$$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{r}\leq 1. \tag{6}$$

Nota che al crescere di r questa somma diminuisce (perchè saltano termini). E a questo punto possiamo concludere:

$$r^\star=\max\left\{r:\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+\cdots+\frac{1}{r}>1\right\}.$$

Dimostrazione di questo, in nota. [6]

Due esempi numerici: per $n=5$ e 10, $r^\star=2$ e 3 rispettivamente.

Note

[1] Soluzione: in questo caso per $r = 1$ abbiamo $(r+1)^{-1} \sum_{c'=1}^{r+1} v(c', r+1) = 1/2$, ed $u_s(1,1) = 1/2$. Dunque direttamente dalla equazione di ottimalità possiamo concudere che la strategia ottima è 'fai quello che vuoi, tanto è lo stesso', perchè ad $r = 1$ sia che accetti sia che rifiuti prendi $1/2$. La soluzione è naturale, perchè in questo caso sia al primo che al secondo colpo hai probabilità 50–50 di prendere il migliore.

[2] Dimostrazione: in (c, r) con $r < n$ è sempre possible aspettare e accettare l'n–esimo oggetto osservato; e così facendo si pesca nell'ultima lotteria, prendendo 1 se esce il migliore (probabilità $1/n$), zero altrimenti, cioè una utilità attesa di $1/n$; sicchè $v(c, r)$, che è l'utilità attesa che si ottiene procedendo da (c, r) con la strategia ottima, non può essere inferiore a questo numero.

[3] Per ipotesi $v(1, r) > u_s(1, r)$, sicchè dalla optimality equation ad $(1, r)$ deduciamo $(r+1)^{-1} \sum_{c'=1}^{r+1} v(c', r+1) > r/n$; e dalla (4) viene, per $c > 1$, $v(c, r) = (r+1)^{-1} \sum_{c'=1}^{r+1} v(c', r+1)$; dunque nella optimality equation ad $(1, r-1)$ ogni termine della somma $r^{-1} \sum_{c'=1}^{r} v(c', r)$ è maggiore di r/n; allora $r^{-1} \sum_{c'=1}^{r} v(c', r) > r/n > (r-1)/n$, da cui il risultato.

[4] Da dimostrare $v(1,1) > u_s(1,1) = 1/n$; ma $v(1,1) = \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\big(v(1,2) + v(2,2)\big)\}$ ed $\frac{1}{2}\big(v(1,2) + v(2,2)\big) \geq \frac{1}{2}\big(\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\big) > \frac{1}{n}$.

[5] Da dimostrare che $u_s(1, n-1) > n^{-1} \sum_{c=1}^{n} v(c, n)$, cioè $(n-1)/n > 1/n$ che, poichè $n > 2$, è vera.

[6] Indica con $\bar{r}$ il secondo membro della relazione di sopra; da dimostrare che $\bar{r} = r^\star$, cioè che per $r \leq \bar{r}$ rifiuti, poi accetti $c = 1$. Ma per $r > \bar{r}$ accetti $c = 1$, perchè andando indietro da $r = n-1$, per costruzione di $\bar{r}$ ogni volta la condizione di accettazione (6) è verificata. E di nuovo per costruzione, ad $(1, \bar{r})$ la (6) è violata e quindi rifiuti.