S Modica 19.III.1999

Relazioni e Rappresentazioni.

[1] Una **relazione** (binaria) R su un insieme X è un sottoinsieme di X^2 ($X^2 = X \times X$, prodotto cartesiano): $R \subseteq X^2$. Per l'appartenenza $(x, y) \in R$ useremo il sinonimo xRy, che per le relazioni che studieremo di più ('ordinamenti' di X) verrà interpretato come "x meglio di y", come vedremo in senso 'debole' o 'stretto' a seconda dei casi. Porremo anche: $R(x) = \{y \in X : yRx\}$, la classe dei preferiti ad x. [2]

Un **ordine** [3] è una R **transitiva** ($xRy \,\&\, yRz \;\Rightarrow\; xRz$) che soddisfa: per ogni $x \neq y$ vale *una ed una sola* fra xRy, yRx. Un **preordine** è una R transitiva che soddisfa: per ogni $x \neq y$ vale *almeno una* fra xRy, yRx. Sicchè la differenza fra ordine e preordine è che un preordine ammette $x \neq y$ 'indifferenti' ($xRy \,\&\, yRx$), mentre in un ordine in ogni coppia $x \neq y$ un elemento è strettamente preferito all'altro ($xRy \,\&\, \neg yRx$ oppure $yRx \,\&\, \neg xRy$). In altre parole un ordine è una 'graduatoria' degli elementi di X senza 'ex–aequo', un preordine una graduatoria con (possibilmente) pareggi. Chiaramente un ordine è un preordine; precisamente:

Esercizio 1. R è un ordine se e solo se è un preordine che soddifsfa: $xRy \,\&\, yRx \Rightarrow x = y$. [4]

Una R può essere **riflessiva** ($\forall\, x\ xRx$) — per esempio l'ordine $\geq$ su $\mathbb{R}$; o **ir**riflessiva ($\forall\, x\ \neg xRx$) — come l'ordine $>$ su $\mathbb{R}$. Può anche essere nè l'uno nè l'altro (esempio in nota). [5]

La scrittura $\langle X, R\rangle$ indica che X è un insieme ed R una relazione su X. Si dice che $\langle X, R\rangle$ ha una **rappresentazione** in $\langle Y, S\rangle$ (S relazione su Y) se esiste $u\colon X \to Y$ tale che per ogni coppia $x_1, x_2 \in X$ risulti $x_1 R x_2 \Leftrightarrow u(x_1)\, S\, u(x_2)$.

Noi siamo interessati principalmente ai preordini (perchè escludere a priori l'indifferenza fra due elementi distinti?), ed alle rappresentazioni in $\langle \mathbb{R}, >\rangle$ o $\langle \mathbb{R}, \geq\rangle$ (per usare il Calcolo). E' facile verificare (e va fatto) che un preordine che non è un ordine non può essere irriflessivo; quindi non può avere una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, >\rangle$ (esiste x tale che xRx, ma per ogni $u\colon X \to \mathbb{R}$ è $u(x) \not> u(x)$). Dunque *cercheremo rappresentazioni in* $\langle \mathbb{R}, \geq\rangle$; ma perchè $\langle X, R\rangle$ possa avere una rappresentazione

[1] In pratica una traduzione libera da D. Krantz, R. Luce, P. Suppes, A. Tversky, *Foundations of Measurement Vol. I*, Academic Press 1971.

[2] Le interpretazioni di xRy ed $R(x)$ cambiano se R è un relazione di equivalenza, vedremo sotto.

[3] anche detto 'ordine totale', 'ordine lineare', 'ordine semplice'.

[4] Ricorda, con p, q proposizioni qualunque, che $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$, dove '$\neg$' indica negazione.

[5] R su $\mathbb{R}_+$ ($= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$) definita da: xRy se $0 \leq x \leq 1 \,\&\, x \geq y$ oppure se $x > 1 \,\&\, x > y$.

in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ è necessario che R sia riflessiva (per ogni u è $u(x) \geq u(x)$); sicchè *ci concentreremo sui preordini riflessivi.*

Esercizio 2. R su X è **completa** se per ogni x, y vale almeno una fra xRy, yRx. Dimostra: R è un preordine riflessivo se e solo se è una relazione transitiva e completa (d'ora in poi: TC).

Una qualunque R su X induce (sempre su X) la relazione di R–indifferenza I_R definita da: xI_Ry se $xRy \,\&\, yRx$; porremo $I_R(x) = \{x' \in X \colon x' I_R x\}$, la 'classe di R–indifferenza' di x.

Osservazione. In termini di I_R l'esercizio 1 dice che gli ordini sono i preordini con $I_R(x) \subseteq \{x\}$. In particolare gli ordini riflessivi (che tornerà presto utile considerare) sono i preordini riflessivi con $I_R(x) = \{x\}\ \forall x$.

Nel prossimo esercizio si dimostra che se una relazione è TC la relazione di indifferenza da essa generata è una 'relazione di equivalenza', dove per definizione: R è una **relazione di equivalenza** su X se è riflessiva, **simmetrica** — $xRy \Rightarrow yRx$ — e transitiva. La simmetria differenzia una relazione di equivalenza da un preordine: in una relazione di equivalenza, per ogni coppia (x, y), o $(x, y) \in R \,\&\, (y, x) \in R$ (x ed y sono equivalenti) oppure $(x, y) \notin R \,\&\, (y, x) \notin R$ (x ed y non sono equivalenti). In un preordine ci sono tipicamente coppie con $(x, y) \in R \,\&\, (y, x) \notin R$ — preferenza stretta. Da qui le differenti interpretazioni di xRy ed $R(x)$ nei due casi. La seconda parte dell'esercizio di sotto chiarisce la struttura delle relazioni di equivalenza.

Esercizio 3. (i) Dimostra che se R è una relazione TC la I_R è una relazione di equivalenza su X. [6]

(ii) Una famiglia $\{X_i \colon i \in I\}$ di sottoinsiemi di X ($X_i \subseteq X$, $i \in I$) è una **partizione** di X se $\cup_{i \in I} X_i = X$ e per ogni $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$. Sia ora E una relazione di equivalenza su X, e poni $X/E = \{E(x) \colon x \in X\}$. Dimostra che X/E è una partizione di X (nota che $\forall\, x, E(x) \equiv \{x' \in X \colon x'Ex\} \neq \emptyset$ perchè $E(x) \ni x$ — riflessività; e che $xEy \Leftrightarrow E(x) = E(y)$). Gli elementi di questa partizione si chiamano classi di equivalenza di E, la $E(x)$ classe di (E–) equivalenza di x.

Sia ora data una relazione TC su X; la chiameremo '$\succcurlyeq$', e '$\succ$' sarà la relazione di preferenza stretta che $\succcurlyeq$ induce, definita da: $x \succ y$ se $x \succcurlyeq y \,\&\, \neg(y \succcurlyeq x)$; porremo inoltre $\sim = I_{\succcurlyeq}$ (cioè $\sim$ è definita ponendo $x \sim y$ se $x \succcurlyeq y \,\&\, y \succcurlyeq x$).

Esercizio 4. Sia $\succcurlyeq$ una relazione TC. Dimostra:

(i) $\neg(x \succ z) \Leftrightarrow z \succcurlyeq x$;

[6] Nota che qui $I_R(x)$ è contemporaneamente la classe di R–indifferenza di x e la sua classe di I_R–equivalenza.

(ii) $x \sim y \,\&\, y \succ z \Rightarrow x \succ z$. [7]

Poni adesso $\tilde{x} = I_{\succcurlyeq}(x)$, ed $\tilde{X} = X/\sim\ (= \{\tilde{x} \colon x \in X\})$; e definisci su $\tilde{X}$ la relazione $\tilde{\succcurlyeq}$ ponendo: $\tilde{x} \,\tilde{\succcurlyeq}\, \tilde{y}$ se $x \succcurlyeq y$ (poichè $\succcurlyeq$ è TC la $\tilde{\succcurlyeq}$ è ben definita, nel senso che per ogni $u \in \tilde{x}$, $v \in \tilde{y}$ si ha $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u \succcurlyeq v$).

Esercizio 5. Dimostra che con $\succcurlyeq$ relazione TC su X, la $\tilde{\succcurlyeq}$ definita sopra è un ordine riflessivo su $\tilde{X}$.

I teoremi di rappresentazione per le relazioni TC seguono facilmente dal corrispondente risultato sugli *ordini* riflessivi; per X finito quest'ultimo è di semplice dimostrazione:

Lemma. *Su X finito ogni ordine riflessivo ha una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$.*

Dim. Sia $\succcurlyeq$ l'ordine. Definisci $u \colon X \to \mathbb{R}$ ponendo $u(x) = \#\{z \in X \colon x \succcurlyeq z\}$ (cioè $u(x) = 1$ per la x peggiore di tutte, $u(x) = 2$ per la 'penultima classificata', ecc.), e verifica che u rappresenta $\succcurlyeq$. [8] $\square$

Il teorema che segue chiarisce il ruolo centrale delle relazioni TC: non soltanto queste hanno una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$, ma di più, se vogliamo una qualunque relazione con una tale rappresentazione, questa dovrà essere una relazione TC (per X finito; come vedremo lo stesso risultato vale per X numerabile; per X non numerabile la classe delle relazioni rappresentabili è un sottoinsieme delle relazioni TC).

Teorema 1. *Una relazione su X finito ha una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ se e solo se è una relazione TC.*

Dim. Sia $\succcurlyeq$ una relazione TC. Sappiamo dall'ultimo esercizio che $\tilde{\succcurlyeq}$ è un ordine riflessivo su $\tilde{X}$ (che è finito, perchè ha al più un numero di elementi pari ad X); dal lemma di sopra esiste $\tilde{u} \colon \tilde{X} \to \mathbb{R}$ che rappresenta $\tilde{\succcurlyeq}$; allora è evidente che la $u \colon X \to \mathbb{R}$ definita ponendo $u(x) = \tilde{u}(\tilde{x})$ rappresenta $\succcurlyeq$.

Viceversa, se R ha una $u \colon X \to \mathbb{R}$ che la rappresenta è facile verificare che soddisfa transitività e completezza. $\square$

Esercizio 6. Sia R su $\mathbb{R}_+$ definita da: xRy se $x < 1 \,\&\, y \geq x$ oppure se $x \geq 1 \,\&\, x \geq y$. (i) Disegna $R \subseteq \mathbb{R}^2_+$; (ii) R è completa? (iii) è transitiva? (iv) esiste una $u \colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ che la rappresenta?

---

[7] Per farli 'puliti' conviene usare un pò di logica formale; lezione di logica al volo: il simbolo '$\vee$' indica 'oppure', non esclusivo, cioè: $p \vee q$ vuol dire 'vale almeno una fra p e q'; sicchè $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \,\&\, \neg q$; poi, importante: $p \Rightarrow q$ è *definita come* $\neg(p \,\&\, \neg q)$; dunque $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

Ora, per (i): ricorda che in una TC vale $\neg\,(x \succcurlyeq z) \Rightarrow z \succcurlyeq x$; per (ii) usa l'equivalenza $(p\&q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p\&\neg r \Rightarrow \neg q)$ — sono entrambi equivalenti a $\neg p \vee \neg q \vee r$.

[8] $\#\{\cdot\}$ è il numero di elementi di $\{\cdot\}$. Dettagli: sia $x \succcurlyeq y$; allora $y \succcurlyeq z$ implica $x \succcurlyeq z$ (transitività), sicchè $u(x) \geq u(y)$; se viceversa $x \not\succcurlyeq y$ allora (completezza) $y \succcurlyeq x$ sicchè $\{z \colon y \succcurlyeq z\} \supseteq \{z \colon x \succcurlyeq z\} \cup \{y\} \supset \{z \colon x \succcurlyeq z\}$ ($\supset$ perchè $y \notin \{z \colon x \succcurlyeq z\}$) da cui $u(x) < u(y)$.

Data una relazione TC su un insieme finito, la dimostrazione del teorema 2 ne fornisce *una* rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$. Ce ne sono altre? Si:

Esercizio 7. u ed u', funzioni da X ad $\mathbb{R}$, rappresentano la stessa $\succcurlyeq$ se e solo se esiste $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente tale che $u' = \phi \circ u$.

Adesso passeremo al caso più generale in cui X non è finito, considerando prima X numerable, poi non numerabile (ovviamente per continuare a leggere devi sapere un pò come si lavora prima con gli insiemi numerabili, poi con quelli non numerabili). Come per il caso finito otterremo il risultato sulle relazioni TC dal corrispondente sugli ordini riflessivi (con dimostrazione identica). Per X numerabile vale lo stesso risultato che per X finito (Teorema 1).

Lemma. *Su X numerabile ogni ordine riflessivo ha una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$.*

Dim. Sia $\succcurlyeq$ l'ordine ed $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. [9] Definisci $u\colon X \to \mathbb{R}$ induttivamente come segue: poni $u(x_1) = 0$, ed avendo definito u su $\{x_1, \dots, x_n\}$ definisci $u(x_{n+1})$ come segue:

- se $x_{n+1} \succ x_k$, $k = 1, \dots, n$ poni $u(x_{n+1}) = n$
- se $x_{n+1} \prec x_k$, $k = 1, \dots, n$ poni $u(x_{n+1}) = -n$
- se non si verfica nessuno dei due casi precedenti ci saranno $1 \leq i, j \leq n$ tali che: $x_i \prec x_{n+1} \prec x_j$ e per ogni $k = 1, \dots, n$ risulta $x_k \preccurlyeq x_i$ oppure $x_k \succcurlyeq x_j$: [10] poni allora $u(x_{n+1}) = [u(x_i) + u(x_j)]/2$.

Per induzione u resta definita su tutto X; da dimostrare che rappresenta $\succcurlyeq$ su X, e basta che la rappresenti su $\{x_1, \dots, x_n\}$ per ogni n (giusto?). Ancora per induzione: u rappresenta banalmente $\succcurlyeq$ su $\{x_1\}$; supposto che la rappresenti su $\{x_1, \dots, x_n\}$, allora la rappresenta anche su $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ per costruzione di $u(x_{n+1})$. Dettagli: per induzione è facile verificare che per $k = 1, \dots, n$ risulta $-n < u(x_k) < n$, sicchè u (per costruzione) rispetta la preferenza se $x_{n+1} \prec x_k$ oppure $x_{n+1} \succ x_k$ per ogni $k = 1, \dots, n$; altrimenti, se $x_k \prec x_{n+1}$ deve essere $x_k \preccurlyeq x_i$ da cui $u(x_k) \leq u(x_i) < u(x_{n+1})$ (il $\leq$ per ipotesi induttiva); analogamente se $x_k \succ x_{n+1}$. $\square$

Teorema 2. *Una relazione su X numerabile ha una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ se e solo se è una relazione TC.*

Dim. Come nel caso di X finito. $\square$

[9] La dimostrazione del caso finito non funziona perche ci possono essere $x \succ y$ entrambi preferiti ad infiniti elementi.

[10] perchè gli insiemi finiti ordinati hanno 'minimo' (x tale che $x \preccurlyeq y \, \forall y$) e 'massimo' ($x$ tale che $x \succcurlyeq y \, \forall y$), cosa che si dimostra per induzione come nel caso di insiemi finiti di $\mathbb{R}$ (ordinati da $\geq$).

Il caso di X non numerabile è diverso; concentriamoci sugli ordini riflessivi (a questo punto sapppiamo come passare ai preordini): non tutti hanno una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$, e il controesempio classico è il cosiddetto ordine 'lessicografico' dell'esempio seguente.

Esempio. $X = \mathbb{R}^2$, con $\succcurlyeq$ definita ponendo

$$(x, y) \succcurlyeq (x', y') \quad \text{se} \quad x > x' \text{ oppure } x = x' \,\&\, y \geq y'$$

(devi convincerti che il nome è appropriato). Supponi che esista $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che rappresenta $\succcurlyeq$; posto $u_1(x) = u(1, x)$, $u_0(x) = u(0, x)$, abbiamo allora $u_1(x) > u_0(x')$ per ogni $x, x' \in \mathbb{R}$; prendi $r(x) \in (u_0(x), u_1(x))$ razionale; la funzione $r \colon \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ è iniettiva, perché se $x > x'$ è $(x, 0) \succ (x', 1)$ da cui $r(x) > u_0(x) > u_1(x') > r(x')$; dunque r mette in corrispondenza biunivoca $\mathbb{R}$ con un sottoinsieme di $\mathbb{Q}$; ma una tale corrispondenza non esiste, sicché deve essere falsa l'ipotesi che esiste u.

Il teorema per $\succcurlyeq$ su X non numerabile è il seguente; per enunciarlo: un insieme $A \subseteq X$ si dice **denso in** $\succcurlyeq$ se per ogni $x \succ y$ esiste $a \in A$ con $x \succcurlyeq a \succcurlyeq y$ (pensa a $\mathbb{Q}$ in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$).

Teorema 3. *Un ordine riflessivo $\succcurlyeq$ su X ha una rappresentazione in $\langle \mathbb{R}, \geq \rangle$ se e solo se esiste $A \subseteq X$ finito o numerabile denso in $\succcurlyeq$.*

Nota che questo teorema contiene i precedenti, perchè banalmente X stesso è denso in $\succcurlyeq$. Chi è interessato alla dimostrazione preferirà vederla in una fonte originale, per esempio KLST.