COMMENTI A CONTI CAP.4

S.MODICA

SEZIONE 4.1: FUNZIONI CONTINUE

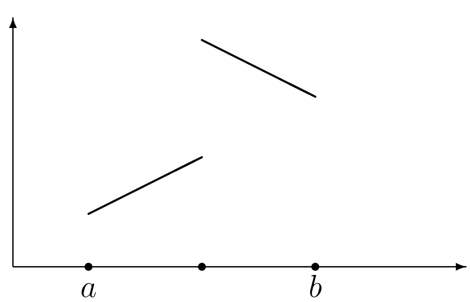
ESEMPIO. (fra gli esempi 4.3, p.94) Nell'ultimo paragrafo di 'Introduzione ai limiti di funzioni' abbiamo in effetti dimostrato (fra le altre cose) che tutte le funzioni fondamentali (potenze, esponenziali e logaritmiche, trigonometriche e loro inverse) sono continue nei rispettivi domini.

SEZIONE 4.2

Ai risultati di questo paragrafo (esclusi ovviamente quelli che riguardano le serie di potenze) ci siamo arrivati per altra strada.

SEZIONE 4.3

Premessa: una funzione monotona è sempre invertibile. E' vero il viceversa, che una funzione invertibile è monotona? No. Esempio nella prossima figura.



Per le funzioni continue (su un $[a, b]$, che sarà sottinteso) invece si:

PROPOSIZIONE. Per le funzioni continue l'invertibilità equivale alla monotonia.

Dim. Da dimostrare che se f (continua) è invertibile, è monotona. Fissa arbitrariamente $x_0 \in (a, b)$. Per l'invertibilità $f(x_0) \neq f(a)$. Vogliamo dimostrare che se $f(x_0) > f(a)$ (risp. $f(x_0) < f(a)$) allora la f cresce (risp. decresce). Lo facciamo per il $>$. Prendi $x_1 \in (a, x_0)$.

Date: Dicembre 1995, Gennaio 1998.

Se $f(x_1) > f(x_0)$, prendi $\bar{y}$, $f(x_0) < \bar{y} < f(x_1)$; dal teorema sui valori intermedi $\exists \alpha \in (a, x_1)$ tale che $f(\alpha) = \bar{y}$ (perchè $f(a) < \bar{y} < f(x_1)$) ed $\exists \beta \in (x_1, x_0)$ tale che $f(\beta) = \bar{y}$ (da $f(x_0) < \bar{y} < f(x_1)$): contraddizione della invertibilità. Dunque $\forall x \in [a, x_0), f(x) < f(x_0)$. Con lo stesso ragionamento si dimostra che $\forall x \in (a, b)$, $f(x) > f(a)$. Ora prendi $x' < x''$ in $[a, b]$. E' $f(x'') > f(a)$, e con $x_0 = x''$ sopra otteniamo $f(x') < f(x'')$. $\square$

Da questa premessa, con dimostrazione come a p.219, segue che l'inversa di una funzione continua è continua. Che la composizione di funzioni continue è continua si dimostra come la proposizione 3.15(d). Conclusione:

TEOREMA. Applicando a funzioni continue operazioni di somma, moltiplicazione, prendere il reciproco, inversione e composizione si ottengono funzioni continue.

In particolare tutte le funzioni così generate dalle tre classi fondamentali (esponenziale, potenza e trigonometriche) sono continue. E poichè le fondamentali sono continue, tutte le funzioni elementari (cfr. 'Usare i numeri') sono continue.

ESERCIZIO Trova f continua in zero ma tale che non esiste intervallo contenente zero in cui f è continua.

SEZIONE 4.4: ESERCIZI

1. Deduci dalle regole di derivazione che $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ ($x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$), $D \tan x = 1/\cos^2 x \equiv 1 + \tan^2 x$, $D \operatorname{arcsen} x = 1/\sqrt{1-x^2}$ e $D \arctan x = 1/(1+x^2)$.

2. Dimostra che se $a \operatorname{sen} x + b \cos x + ce^x = 0$ per ogni x, allora $a = b = c = 0$ (deriva tre volte la funzione a primo membro).

3. Esiste $f'_+(0)$ con $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$?

4. una scala lunga 4 metri è appoggiata ad un muro e forma un angolo di 60º con il pavimento. Se quest'angolo passa a 59º, di quanto varia l'altezza del punto in cui la scala tocca il muro? Approssima la risposta usando il differenziale (ricorda che 1º = ... radianti). Risposta: circa 3.3 cm.

SEZIONE 4.5:MASSIMI E MINIMI, STUDIO LOCALE DEL GRAFICO

ESEMPI. **(a)** La seguente funzione non è crescente nè decrescente in $x_0 = 0$, nè ha lì massimo o minimo locale (nota che esiste $Df(0) = 0$):

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

(b) Inoltre, una funzione può essere crescente in un punto anche se non esiste un intervallo contenente il punto in cui la funzione è crescente. Esempio: in $x_0 = 0$, la

$$f(x) = \begin{cases} x(1 + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

MASSIMI E MINIMI, STUDIO GLOBALE

Il seguente risultato dà condizioni necessarie e sufficienti per la crescenza di una f derivabile su $[a, b]$. Per la crescenza la c.n.s. è $f' \geq 0$; per la crescenza stretta si trova che deve essere $f' > 0$ tranne in punti isolati (pensa ad x^3):

PROPOSIZIONE. Sia f derivabile su $[a, b]$. Allora

(i) f è crescente se e solo se $f' \geq 0$ su $[a, b]$;

(ii) f è strettamente crescente se e solo se $f' \geq 0$ su $[a, b]$ e non esiste intervallo non degenere contenuto in $[a, b]$ per tutti gli x del quale $f'(x) = 0$. [1]

Dim. (i) è facile: se f è crescente, per qualunque x il rapporto incrementale è positivo per ogni h, e così dunque il limite; se $f' \geq 0$ il risultato segue da Lagrange.

(ii). Se f è strettamente crescente è crescente quindi da (i) $f' \geq 0$; e se esistesse un intervallo come descritto la f vi si manterrebbe costante (Lagrange), quindi un tale intervallo non ci può essere. Viceversa, l'ipotesi implica che f è crescente (da (i)). Se non lo fosse strettamente, ci sarebbero $x_1 < x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$; nel qual caso la crescenza implicherebbe la costanza di f su $[x_1, x_2]$, e quindi l'esistenza di un intervallo in cui $f' = 0$, che per ipotesi non esiste. □

Altro discorso, su massimi e minimi *locali*. Abbiamo visto che se x_0 è massimo o minimo interno ed esiste $Df(x_0)$, questa deve essere zero (Prop. 4.27(c)). Dall'ultimo esempio (a) di sopra vediamo che non è vero il viceversa, cioè può essere $Df(x_0) = 0$ in un punto interno in cui la f non ha massimo nè minimo (un esempio più semplice è $f(x) = x^3$, sempre in $x_0 = 0$). Quindi la sola conoscenza del valore $Df(x_0) = 0$ non basta per asserire l'esistenza di un massimo o minimo in x_0. D'altra parte sappiamo dalla Prop. 4.31(a) che se conosciamo il segno di Df in tutto un intorno di x_0 e Df cambia segno in x_0, allora f ha in x_0 massimo o minimo; ma che Df cambia segno in x_0 significa esattamente che Df è crescente o decrescente in x_0; supponi ora che esiste anche $D^2 f(x_0)$; dalla Proposizione 4.27(a) segue allora che una condizione *sufficiente* perchè Df sia crescente o decrescente è che $D(Df)(x_0) \equiv D^2 f(x_0) \neq 0$. E siamo così arrivati alla seguente, che è più o meno la Prop. 4.36 del libro (un massimo locale è *forte* se

[1] Degenere è un intervallo del tipo $[a, a] = \{a\}, a \in \mathbb{R}$.

in $I(x_0) \setminus x_0$ è $f(x) < f(x_0)$, non solo $\leq$; analoga definizione vale per il minimo):

PROPOSIZIONE. Sia $x_0 \in (a, b) \subseteq D_f$ un punto in cui f è derivabile due volte. Se $Df(x_0) = 0$ e $D^2 f(x_0) \neq 0$, allora f ha in x_0 un massimo o un minimo locale forte. Precisamente, ha un massimo (risp. minimo) se $D^2 f(x_0) < 0$ (risp. $D^2 f(x_0) > 0$).

Dim. Facciamo il massimo. $D^2 f(x_0) < 0$ implica che Df è decrescente in x_0, ma questo, con $Df(x_0) = 0$, implica che Df cambia segno in x_0 (positiva a sinistra, negativa a destra di x_0); risultato da Prop. 4.31(a). $\square$

ESERCIZI

In questi esercizi estendiamo il risultato appena visto. $x_0 \in (a, b) \in D_f$, ed f è derivabile quante volte serve.

5. Dimostra che: (i) Se $Df(x_0) = D^2 f(x_0) = 0$ e $D^2 f$ ha massimo forte in x_0 allora lo ha anche f; e (ii) Se $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n$ e $D^{2n} f$ ha massimo forte in x_0 allora lo ha anche f (per induzione).

Concludi allora, di nuovo per induzione, che (come dimostreremo più facilmente con altri strumenti in mano):

(iii) Se $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$ e $D^{2n} f(x_0) < 0$ allora x_0 è un massimo forte di f. [2]

6. Adatta il ragionamento precedente per dimostrare che: Se $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n - 1$ e $D^{2n} f(x_0) > 0$ allora x_0 è minimo forte.

7. Dimostra ora che: Se $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n$ e $D^{2n+1} f(x_0) > 0$ (risp. < 0) allora f è crescente (risp. decrescente) in x_0.

CONVESSITA'

Premesse:

- sia $u < w$; ogni $v \in \mathbb{R}$ si può scrivere come $u + t(w - u)$: $v == u + v - u = u + \frac{v-u}{w-u} \cdot (w - u)$; ed $u + t(w - u) \in (u, w) \Leftrightarrow t \in (0, 1)$ (facile);

[2] Soluzione: (i) Per ipotesi esiste $I(x_0) \setminus x_0$ in cui $D^2 f = D(Df) < 0$; dunque Df è strettamente decrescente in $I(x_0)$, sicchè cambia segno in x_0 (ricorda $Df(x_0) = 0$); risultato da prop. 4.31(a).

(ii) Risultato vero per $n = 1$ da (i); supposto vero per n, se ora $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2(n+1)$ e $D^{2(n+1)} f$ ha massimo forte in x_0, applica (i) a $g = D^{2n} f$ per ottenere che $D^{2n} f$ ha massimo forte in x_0, e usa l'ipotesi induttiva per concludere.

(iii) Per $n = 1$ il risultato è l'ultima proposizione nel testo; supposto vero per n, se ora $D^k f(x_0) = 0$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n + 1$ e $D^{2n+2} f(x_0) < 0$, applica la stessa proposizione a $D^{2n} f$ per concludere che questa ha massimo forte, e invoca (ii) per concludere.

- ricorda che per le rette $r(x) = ax + b$ vale $r((1-t)u + tw) = (1-t)r(u) + tr(w)$ (affinità); dunque per la corda passante per $(u, f(u))$ e $(w, f(w))$ si ha $r((1-t)u+tw) = (1-t)f(u)+tf(w)$.

Dalla proposizione segue che ci sono tre definizioni equivalenti di convessità (stretta); normalmente si usa la (iii). La caratterizzazione che noi useremo di più è l'ultima.

PROPOSIZIONE (Convessità stretta). Sia f una funzione, I un intervallo contenuto nel suo dominio, ed u, v, w punti di I.
Le proprietà *(i)–(iii)* qui sotto sono equivalenti:

(i) Corde successive hanno pendenza crescente:

$$\forall\ u < v < w \quad \frac{f(v) - f(u)}{v - u} < \frac{f(w) - f(v)}{w - v};$$

(ii) Rapporto incrementale crescente:

$$\forall\ u < v < w \quad \frac{f(v) - f(u)}{v - u} < \frac{f(w) - f(u)}{w - u} < \frac{f(w) - f(v)}{w - v};$$

(iii) Funzione sotto la corda:

$$\forall\ u < w,\ \forall t \in (0, 1) \quad f((1-t)u + tw) < (1-t)f(u) + tf(w).$$

Se f è derivabile su I, *(i)–(iii)* sono equivalenti anche a *(iv)* e *(v)*:

(iv) Funzione sopra le tangenti:

$$\forall\ u \neq w \quad f(w) > f(u) + Df(u)(w-u);$$

(v) Pendenza crescente:

$$u < w \quad \Rightarrow \quad Df(u) < Df(w).$$

Se f è derivabile due volte su I, *(i)–(v)* sono equivalenti anche a:

(vi) Derivata seconda positiva: $D^2 f > 0$ su I, tranne in punti isolati.

Dim. (ii) $\Rightarrow$ (i) è evidente; per il viceversa scrivi

$$\frac{f(w) - f(u)}{w - u} = \frac{f(w) - f(v) + f(v) - f(u)}{w - u} = \frac{w - v}{w - u}\frac{f(w) - f(v)}{w - v} + \frac{v - u}{w - u}\frac{f(v) - f(u)}{v - u};$$

usando $\frac{f(w)-f(v)}{w-v} > \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ e $\frac{w-v}{w-u} > 0$ ottieni $\frac{f(w)-f(u)}{w-u} > \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ moltiplicato $\left(\frac{w-v}{w-u} + \frac{v-u}{w-u}\right) = 1$; analogamente procedi usando $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} < \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$ per l'altra disuguaglianza.

(iii) $\Rightarrow$ (i): assumi (iii), che scriviamo come $f(u+t(w-u)) < f(u) + t(f(w)-f(u))$; se $u < v < w$ sarà $v = u+t(w-u)$ con $t \equiv \frac{v-u}{w-u} \in (0,1)$, sicchè da (iii) $f(v) < f(u) + \frac{v-u}{w-u}(f(w) - f(u))$; moltiplicando per $w-u = (w-v)+(v-u)$ resta $(w-v)(f(v)-f(u)) < (v-u)(f(w)-f(v))$, cioè (i).

(i) $\Rightarrow$ (iii): continuando a supporre $u < w$, dalla disuguaglianza appena scritta torna all'equivalente $f(v) < f(u) + \frac{v-u}{w-u}(f(w) - f(u))$; osserva che per $t \in (0,1)$ è $u < u+t(w-u) < w$ da cui $f(u+t(w-u)) <$

$f(u)+t(f(w)-f(u))$, come si voleva. Se $u > w$, la (i) con $w < v < u$ è $\frac{f(v)-f(w)}{v-w} < \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$ cioè $(w-v)(f(v)-f(u)) > (v-u)(f(w)-f(v))$, quella del caso precedente con verso opposto, che è di nuovo equivalente a $f(v) < f(u) + \frac{v-u}{w-u}(f(w)-f(u))$ (perchè moltiplicando questa per $w-u < 0$ il verso cambia); e se $t \in (0,1)$ è $w < u+t(w-u) < u$ sicchè di nuovo $f(u+t(w-u)) < f(u)+t(f(w)-f(u))$.

Per f derivabile: (iv) $\Rightarrow$ (i): disegna le corde (ascisse $u < v < w$) e la tangente in v, e verifica che (iv) implica che la pendenza della prima corda è minore della pendenza della tangente, a sua volta minore di quella della seconda corda.

(ii) $\Rightarrow$ (iv): sia r la tangente in v; poichè $r(v) = f(v)$, f sta sopra r se $\forall\, w^0 \neq v$ l'incremento lungo la curva $f(w^0)-f(v) = \frac{f(w^0)-f(v)}{w^0-v}(w^0 - v)$ è maggiore di quello lungo la retta, $f'(v)(w^0-v)$. Se $v < w^0$ questo equivale ad $\frac{f(w^0)-f(v)}{w^0-v} > f'(v)$; ma (disegna e poi verifica) per (ii) $a(w) \equiv \frac{f(w)-f(v)}{w-v}$ decresce con w; e $\lim_{w\to v^+} a(w) = f'(v)$; sicchè deve essere $a(w) > f'(v)\ \forall\, w > v$ (*giusto*?). Se $w^0 < v$ vogliamo $\frac{f(w^0)-f(v)}{w^0-v} < f'(v)$; te la puoi cavare da solo. Situazione: (i)–(iv) sono equivalenti.

(ii) $\Rightarrow$ (v): prendi $u < w$, fissa $v^0 \in (u,w)$, chiama a_1, a_2 la pendenza delle corde; (iv) implica che $a_1 < a_2$ e che (come poco fa) $f'(u) < a_1$ ed $a_2 < f'(w)$; da qui $f'(u) < f'(w)$.

(v) $\Rightarrow$ (i): per Lagrange esistono $\xi_1 \in (u,v)$ e $\xi_2 \in (v,w)$ tali che la prima e la seconda corda hanno pendenza uguale rispettivamente ad $f'(\xi_1)$ ed $f'(\xi_2)$; ma poichè $\xi_1 < \xi_2$ dall'ipotesi segue $f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$. Sicchè (i)–(v) sono equivalenti.

Per finire, conosciamo già l'equivalenza (v)–(vi). $\square$

Usando la definizione di funzione concava (f è *concava* sull'intervallo $I \subseteq D_f$ se $-f$ è ivi convessa) è immediato verificare che le funzioni **concave** sono quelle che stanno sopra le corde, che hanno corde successive con pendenza decrescente, se sono derivabili stanno sotto la tangente, eccetera.

ESEMPI. **(a)** La curvatura delle funzioni fondamentali, potenze, esponenziali e trigonometriche si trova subito dal segno della derivata seconda. *Verifica* che le loro figure (in 'Usare i Numeri') sono giuste.

(b) Flessi. I flessi di una f sono i punti in cui f cambia curvatura, da convessa a concava o viceversa. Se $f \in C^3((a,b))$, ciò equivale a: f ha un flesso in $x_0 \in (a,b)$ se $D^2 f$ cambia segno in x_0, che a sua volta è equivalente alla condizione: $D^2 f(x_0) = 0$ e $D^3 f(x_0) \neq 0$.

(c) Sia f definita per $x \geq 0$ con $f(0) = 0$, derivabile e strettamente concava su $\mathbb{R}_+$. Allora per ogni $x > 0$ è $f'(x) < f(x)/x$. Se f è una funzione di costo, stiamo dicendo: se il costo marginale è decrescente (concavità) allora è minore del costo medio $(f(x)/x)$. Dimostrazione:

dato $x > 0$, dal teorema di Lagrange esiste $0 < x' < x$ tale che $f(x)/x = f'(x')$; ma per la concavità f' decresce, quindi $f'(x) < f'(x')$; di qui la conclusione.

(d) Per la convessità 'debole', come l'interessato può facilmente verificare, valgono i risultati della proposizione di sopra con le disuguaglianze 'indebolite'.

Un'altra cosa riguarda la struttura molto semplice dei minimi delle funzioni convesse derivabili (e parallelamente i massmi delle funzioni concave); in pratica questo è molto utile:

PROPOSIZIONE. Sia f convessa e derivabile su $\mathbb{R}$. Allora $Df(x_0) = 0$ è condizione necessaria *e sufficiente* perchè x_0 sia un minimo.

Dim. Che è necessario lo sapevamo; per la sufficienza: f sta sopra la tangente in x_0, cioè $\forall x \; f(x) \geq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$. $\square$

ESERCIZI

8. Dimostra che se f è *strettamente* convessa su $\mathbb{R}$, allora:
(i) f ha al più un solo minimo locale, che è allora minimo globale;
(ii) se f ha minimo, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$. Se vuoi fai solo il caso particolare di f con derivata continua. [3]

9. Verifica le proprietà accennate delle funzioni concave.

UN ESEMPIO ECONOMICO DI CONVESSITA'

L'impresa massimizza rispetto alla quantità q il profitto $pq - c(q)$, con p prezzo e $c(q)$ costo. [4] Chiamiamo $q(p)$ la quantità che massimizza $pq - c(q)$ al prezzo p e $\pi(p) = pq(p) - c(q(p))$ il profitto realizzato. Fatto: La funzione profitto $p \mapsto \pi(p)$ è convessa. Dimostrazione: da $\pi(p) \geq pq - c(q) \forall q$ abbiamo, abbreviando $\bar{q} = q(tp_1 + (1-t)p_2)$,

[3] Soluzioni: (i) se $f(x_1) = f(x_2)$, per ogni $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$ con $t \in (0,1)$ è $f(x) < f(x_1)$, quindi x_1 e x_2 non possono essere minimi locali.

(ii) Consideriamo $x \to \infty$: sia x_0 il minimo; da (i) è unico, quindi fissato $x_1 > x_0$ sarà $f(x_1) > f(x_0)$; sicchè la corda r passante per $(x_0, f(x_0))$ ed $(x_1, f(x_1))$ ha pendenza positiva e tende a infinito; ma per $x > x_1$ la corda fra $(x_1, f(x_1))$ ed $(x, f(x))$ ha pendenza maggiore di r, quindi $f(x) > r(x)$ (disegna per aiutarti), perciò anche $f \to \infty$. Il caso di $x \to -\infty$ è analogo.

[4] Condizioni necessarie per il massimo $p = c'(q)$ e $c''(q) \geq 0$ (no?). Spesso si assume che i costi marginali c' crescono con q (l'idea è che applicando quantità crescenti di fattori variabili agli impianti fissi aumentano le code per usare le macchine e altre cose del genere che fanno salire con q il costo di ogni unità addizionale di prodotto, di cui c' è approssimazione lineare). In tal caso c è strettamente convessa, e $p = c'(q)$ è necessario e sufficiente.

$$t\pi(p_1)+(1-t)\pi(p_2) = t[p_1q(p_1)-c(q(p_1))]+(1-t)[p_2q(p_2)-c(q(p_2))]$$
$$\geq t[p_1\bar{q} - c(\bar{q})] + (1-t)[p_2\bar{q} - c(\bar{q})] = \pi(tp_1 + (1-t)p_2).$$

Diamo a t interpretazione probabilistica. Se il profitto è 10 se cade testa e 5 se croce, il profitto medio, o atteso, è 7.5; se è 10 se un dado fa 6, 0 altrimenti l'attesa è $\frac{1}{6}10 + \frac{5}{6}0$; e se è π_1 con probabilità t e π_2 con probabilità $1-t$, la media è $t\pi_1 + (1-t)\pi_2$. Dunque se il prezzo è p_1 o p_2 con probabilità t ed $1-t$, il profitto atteso è $t\pi(p_1) + (1-t)\pi(p_2)$. Maggiore del profitto $\pi(tp_1 + (1-t)p_2)$ realizzato se il prezzo è di sicuro $tp_1 + (1-t)p_2$. L'impresa preferisce incertezza sul prezzo?! Ci deve essere qualcosa di storto; e c'è. L'assunzione economicamente irrealistica che si nasconde dietro questa storia e la sua non credibile conclusione è che l'impresa aggiusta istantaneamente q alle variazioni di p, potendo così ottenere il massimo $\pi(p)$ per ogni p. Se assumiamo che q vada fissato prima di conoscere il prezzo, in condizioni di incertezza l'impresa massimizzerà rispetto a q il profitto atteso, cioè $t(p_1q-c(q))+(1-t)(p_2q-c(q)) = (tp_1+(1-t)p_2)q-c(q)$; questo è massimo per $q = q(tp_1+(1-t)p_2)$ con valore $\pi(tp_1+(1-t)p_2)$, uguale a quello realizzato con prezzo certo $tp_1+(1-t)p_2$. Conclusione: sotto questa ipotesi l'impresa è indifferente fra le due situazioni. Se si assume avversione al rischio, oppure si toglie l'ipotesi (di concorrenza perfetta) che il prezzo non dipenda da q e lo si lascia essere funzione per esempio decrescente della quantità, si trovano condizioni ragionevoli sotto le quali l'impresa preferisce il prezzo certo. Noi chiudiamo qui, e apriamo invece un p.s. sugli integrali.

Abbiamo visto il valore atteso, o media, $t\pi_1 + (1-t)\pi_2$; ma anche l'integrale avevamo detto che era una media (della funzione integranda sull'intervallo, teorema della media integrale). Sono due medie diverse? No, sono la stessa cosa. Per vederlo basta mettere la probabilità su un intervallo $[a,b]$, identificando la pobabilità t con la corrispondente frazione di $[a,b]$, cioè con l'intervallo $[a,c]$ tale che $\frac{c-a}{b-a} = t$. Prendere π_1 e π_2 con probabilità t ed $(1-t)$ diventa assumere valore π_1 nell'intervallo $[a,c]$ e π_2 in $(c,b]$. Se di questa funzione prendiamo l'integrale su $[a,b]$ e dividiamo per $b-a$ otteniamo appunto $t\pi_1 + (1-t)\pi_2$.

FUNZIONI IPERBOLICHE: LORO INVERSE

Per trovare l'inversa di $\operatorname{senh} x$ si deve risolvere $\operatorname{senh} x = y$ rispetto ad x che, pòsto $z = e^x$, diventa $z^2 - 2yz - 1 = 0$, di cui cerchiamo le soluzioni *positive* (perchè $e^x > 0\,\forall x$) per poi prenderne il logaritmo. L'unica soluzione positiva della nostra equazione di secondo grado in z è $z = y + \sqrt{1+y^2}$ ($y - \sqrt{1+y^2} < 0\,\forall y$), da cui $x = \log(y + \sqrt{1+y^2})$.

Cambiando nome otteniamo
$$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1}).$$
Conviene averne presente la derivata: $D \log(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

L'inversa di $\cosh x$ si fa per $x \geq 0$. Di nuovo con $z = e^x$, l'equazione $\cosh x = y$ diventa $z^2 - 2yz + 1 = 0$, di cui cerchiamo le soluzioni ≥ 1 (perchè $e^x \geq 1 \, \forall x \geq 0$). Le soluzioni sono $z = y \pm \sqrt{y^2-1}$; notando che per $x > 0$ è $y = \cosh x \, 1$ possiamo rigettare la soluzione $z = y - \sqrt{y^2-1}$, perchè $y > 1 \Rightarrow y - \sqrt{y^2-1} < 1$ (giusto?). [5] Conclusione, $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$, da cui prendendo i logaritmi e cambiando nome otteniamo
$$f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2-1}),$$
con derivata $D \log(x + \sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Il grafico è come una fotografia che dobbiamo mettere a fuoco per approssimazioni successive. Un possibile ordine con cui procedere è il seguente:

1º. Dominio della funzione ed eventuale parità/disparità
2º. Limiti, dove vanno fatti
3º. Crescenza/decrescenza, cioè studio di f' (dove si può)
4º. Curvatura, cioè studio di f'' (dove si può)
5º. Punti in cui la f non è derivabile, segno della funzione, asintoti obliqui, ecc.

A proposito di asintoti obliqui. Una retta $r(x) = ax + b, a \neq 0$ è asintoto di f per $x \to \infty$ se $\lim_{x\to\infty} f(x) - r(x) = 0$; analoga definizione per $x \to -\infty$. Per trovare un eventuale asintoto per $x \to \infty$ (discorso analogo per $x \to -\infty$) osserva che se r lo è, allora $a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ (dividi per x nella definizione); dunque il valore di questo limite è l'unico candidato a coefficiente angolare del possibile asintoto; per cui se tale limite non esiste o non è finito non c'è asintoto obliquo. Se invece esiste finito (diciamo a) possiamo cercare b, e anche qui c'è un solo possibile candidato, $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax$. Se questo esiste finito abbiamo trovato l'asintoto, altrimenti non ce n'è. Per inciso: ci può essere al più un asintoto di f per $x \to \infty$ (perchè?).

ESEMPIO. La $f(x) = x - 2\arctan x$ ha $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, e $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \mp\pi$; dunque ha asintoti $y = x - \pi$ per $x \to \infty$ ed $y = x + \pi$ per $x \to -\infty$.

In pratica, il grosso del lavoro nello studio di funzione consiste in calcolo di limiti e studio di disequazioni (per il dominio e per le derivate).

[5] Per ogni $y > 1$ è chiaramente $y + \sqrt{y^2-1} > 1$; allora $y - \sqrt{y^2-1} < (y - \sqrt{y^2-1})(y + \sqrt{y^2-1}) = 1$.

Di queste è un pò che non ne facciamo, e l'esercizio qui sotto ha lo scopo di recuperarle dalla memoria.

ESERCIZIO

Determina il dominio delle seguenti funzioni (sottintendo $f(x) = \dots$), soluzioni in nota:

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \log(|x|-2) & (ii) & \log_a(\sqrt{x}-x) \\
(iii) & \sqrt{8\,\mathrm{sen}^3 x - 1} & (iv) & \sqrt{\mathrm{sen}^2 x - 1/2} \\
(v) & \big(1+\frac{1}{x}\big)^{\log x} & (vi) & \sqrt{\frac{1+x}{\log x}} \\
(vii) & \sqrt{\frac{\log(3x^2-2x)}{x-2}} & (viii) & \sqrt{x+\sqrt{1+x}} \\
(ix) & \log_{10}(9^x - 4\cdot 3^x + 3) & (x) & \sqrt{x^2+|x|-6} \\
(xi) & \sqrt{3-\log_2(x+5)} & (xii) & \frac{2x-1}{x+|x|+1} \\
(xiii) & \frac{2\log x - 1}{\log x - 1} & (xiv) & \log\log(x^2-3x) \\
(xv) & \sqrt{\frac{x-4}{x+3}} & (xvi) & \mathrm{arcsen}(3x-2) \\
(xvii) & \arctan\log(x-\sqrt{1-x^2}) & &
\end{array}
$$

(xviii) $f\circ g$ e $g\circ f$ con $f=\sqrt{x}$, $g = 2x-1$

(xix) $f\circ g$ con $f(x) = \begin{cases} 1 & |x|\le 1 \\ 0 & |x|>1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 2-x^2 & |x|\le 2 \\ 2 & |x|>2 \end{cases}.$

Sugg.: nella (viii) conviene separare $x<0$, $x\ge 0$. [6]

UNO STUDIO DI FUNZIONE PROPEDEUTICO

Studiamo la facile $f(x) = \dfrac{1}{x} + \log x$. [7] $D_f = \mathbb{R}_+$, e in questo caso il segno di f è immediato: $f(x) = \frac{1}{x} - \log\frac{1}{x}$, e per ogni $x>0$ è $\frac{1}{x} > 0$, e

[6] Soluzioni: (i) $(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$; (ii) $(0,1)$; (iii) $[(1/6+2k)\pi,(5/6+2k)\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$; (iv) $[\pi/4+2k\pi, 3\pi/4+2k\pi]\cup[5\pi/4+2k\pi, 7\pi/4+2k\pi]$, $k\in\mathbb{Z}$; (v) $(0,\infty)$; (vi) $(1,\infty)$; (vii) $[-1/3,0)\cup(2/3,1]\cup(2,\infty)$; (viii) $[(1-\sqrt{5})/2,\infty)$; (ix) $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$; (x) $(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$; (xi) $(-5,3]$; (xii) $\mathbb{R}$; (xiii) $\mathbb{R}_+\setminus\{e\}$; (xiv) $(-\infty,(3-\sqrt{13})/2)\cup((3+\sqrt{13})/2,\infty)$; (xv) $(-\infty,-3)\cup[4,\infty)$; (xvi) $[1/3,1]$; (xvii) $(1/\sqrt{2},1]$; (xviii) $D_{f\circ g} = [1/2,\infty)$, $D_{g\circ f} = [0,\infty)$; (xix) $D_{f\circ g} = \mathbb{R}$, $(f\circ g)(x) = \begin{cases} 1 & x\in[-\sqrt{3},-1]\cup[1,\sqrt{3}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$

[7] Il lettore perdoni l'assenza dei disegni dei grafici, che sono solo descritti a parole.

sappiamo dall'esempio (c) di pag.**??** che per tali valori $\frac{1}{x} - \log\frac{1}{x} \geq 1 > 0$. [8] A che ci siamo, da $f(x) \geq 1\,\forall x \in D_f$ ed $f(1) = 1$ possiamo dedurre anche che $x = 1$ è un minimo globale di f.

Limiti: per $x \to \infty$ chiaramente $f \to 0 + \infty = \infty$; per $x \to 0^+$ prendiamo la variabile $z = \frac{1}{x} \to \infty$; sapendo che $\lim_{z\to\infty} \frac{\log z}{z} = 0$ otteniamo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{z\to\infty} z - \log z = \lim_{z\to\infty} z\big(1 - \frac{\log z}{z}\big) = \infty \cdot (1-0) = \infty$.

A questo punto possiamo formulare un'ipotesi di prima approssimazione su f: f scende da infinito ad 1 per x che va da zero ad 1, e poi risale verso infinito; magari sempre convessa. E' un'ipotesi semplicistica, che va tutta verificata, ma conviene avanzarla perchè è compatibile con i dati in nostro possesso *e ci aiuta* nei passi successivi, che serviranno a migliorarla in correttezza e precisione. Per esempio, se ora trovassimo che $Df < 0\,\forall x > 1$ sapremmo subito che abbiamo sbagliato la derivata e/o la disequazione, perchè un tale risultato è incompatibile con $\lim_{x\to\infty} f = \infty$, e le rifaremmo trovando l'errore; senza un'idea guida invece non ci sarebbe motivo di sospettare lo sbaglio; andremmo avanti, e quando con tutti dati in mano troveremmo che qualcosa non quadra dovremmo ricontrollare tutto senza nessun indizio su dove possa annidarsi l'errore. Perciò, dopo dominio e limiti punteremo sempre ad una prima approssimazione del grafico.

La derivata è $Df(x) = (x-1)/x^2$, che è negativa fino ad 1 e poi positiva, come ci aspettavamo. Per la curvatura, $D^2 f(x) = (2-x)/x^3$, che è positiva fino a 2 e poi negativa; dunque la f non è sempre convessa come avevamo congetturato in prima approssimazione, ma ha un flesso in $x = 2$ dopo il quale cresce concava.

Adesso si può disegnare il grafico, segnando il punto di minimo $(1, 1)$ e il flesso ad $x = 2$. Per disegnare il grafico può essere utile incolonnare in un diagramma tipo più/meno una prima retta con i valori 'rilevanti' di x ed eventualmente il segno di f, una retta con il segno di Df e magari frecce che salgono o scendono nei vari pezzi per visualizzare, e una con il segno di $D^2 f$, se si vuole con segni di semicirconferenze per vedere la curvatura. Lo si faccia nel caso presente come esempio, anche se è inutile.

ALTRI ESEMPI PIÙ O MENO FACILI

(a) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1}$. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, e per tali valori $f(x) = 1/(x+1)$, che conosciamo ($1/x$ traslata orizzontalmente di -1). Dunque il grafico di questa f è

[8] Di solito il segno di f non è facile da stabilire direttamente, e conviene farlo con in mano qualche informazione in più sulla funzione —per esempio, se si sa che il minimo globale è 1, allora $f > 0\,\forall x \in D_f$ senza sforzo. Per questo lo abbiamo messo fra le cose da fare per ultime. Ovviamente un'occhiata all'inizio ce la si può sempre dare.

quello di $1/(x+1)$ *con* un pallino bianco in corrispondenza di $x=1$, dove non è definita (a differenza di $1/(x+1)$).

(b) $f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)$, cioè il polinomio di terzo grado $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ definito per ogni x. $\lim_{x\to\pm\infty} f=\pm\infty$. Come prodotto di tre fattori il segno di f non ha misteri; e quelli di $Df=3x^2-8x+1$ e $D^2f=2(3x-4)$ sono pure chiari. Determinati questi non resta che incolonnare i dati in un diagramma più/meno e disegnare, segnando gli zeri $x=-1,2,3$, massimo e minimo $x=(4\mp\sqrt{13})/2$ e il flesso $4/3$. La descriviamo (come tutte le altre) per x che va da meno infinito a infinito (in D_f): partendo da $\lim_{x\to-\infty} f=-\infty$, f cresce concava, attraversa l'asse in $x=-1$, raggiunge il massimo in $x=(4-\sqrt{13})/2$, poi decresce, diventa convessa in corrispondenza di $x=4/3$, riattraversa l'asse orizzontale ad $x=2$, raggiunge il minimo ad $x=(4+\sqrt{13})/2$, poi risale, sempre convessa fino al $\lim_{x\to\infty} f=\infty$.

(c) $f(x)=\dfrac{2\cos x}{2-\operatorname{sen} x}$ (dal Barozzi–Corradi). $2-\operatorname{sen} x>0\,\forall x$, sicchè $D_f=\mathbb{R}$, e il segno di f è quello di $\cos x$; ha periodo 2π, dunque la possiamo studiare per $x\in[0,2\pi)$. E' continua, quindi niente limiti da calcolare (in particolare puoi cominciare a disegnare $f(0)=f(2\pi)=1$ ed $f(\pi/2)=f(3\pi/2)=0$ che in questo caso sappiamo); la derivata prima è $Df(x)=2\frac{1-2\operatorname{sen} x}{(2-\operatorname{sen} x)^2}$, che ha il segno di $1/2-\operatorname{sen} x$; quindi f cresce fino a $\pi/6$, con $f(\pi/6)=2/\sqrt{3}$, poi decresce fino a $\pi-\pi/6$ con $f=-2/\sqrt{3}\mathrm{D}^2f(x)=-4\frac{\cos x(1+\operatorname{sen} x)}{(2-\operatorname{sen} x)^3}$, che si annulla in $x=\pi/2,3\pi/2$ e nel resto dell'intervallo ha il segno di $-\cos x$ cioè: f è concava fino a $\pi/2$, convessa da lì a $3\pi/2$, poi di nuovo concava. Incolonna i dati.

Per disegnare si segnino $x=\pi/6$ punto di massimo, $\pi/2$ e $3\pi/2$ che sono contemporaneamente i flessi e gli zeri di f, $5\pi/6$ che è il minimo, e 2π dove finisce il grafico (nel resto di $\mathbb{R}$ sono repliche); sull'asse verticale basta segnare i valori ai massimi e minimi. A parole: f sale concava fino a $\pi/6$, poi scende concava fino a $\pi/2$ dove tocca l'asse orizzontale, continua a scendere ma convessa fino a $5\pi/6$ e risale, sempre convessa, fino a $3\pi/2$ dove ritocca lo zero e ricambia curvatura, per salire concava fino a 2π.

(d) $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x+1}$. $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, e ponendo $g(x)=\frac{x-1}{x+1}$ abbiamo $f(x)=\begin{cases}-g(x) & x\le 1,\, x\neq -1\\ g(x) & x>1\end{cases}$; dunque basta studiare g, poi per avere f ne ribalteremo un pezzo, stando attenti a cosa succede nei punti in cui si passa da g a $-g$ (in particolare bisogna controllare la derivabilità: pensa al passaggio da $g=x$ ad $f=|x|$; in $x=0$ si perde la derivabilità).

I limiti sono facili: $\lim_{x\to\pm\infty} g=1$ e $\lim_{x\to(-1)^\pm} g=\mp\infty$. Così come la derivata prima: $Dg=2(x+1)^{-2}>0\,\forall x\neq-1$, quindi g è sempre crescente. A questo punto disegna un grafico (di g) di prima approssimazione. Manca la curvatura; ci potremmo aspettare convessità fino a -1 poi concavità, e in effetti $D^2g=-4(x+1)^{-3}$, che lo conferma. [9] Ora abbiamo graf g, che possiamo disegnare tratteggiato, ribaltiamo per $x\le 1$ e otteniamo graf f. E' chairo dalla figura che f non è derivabile in $x=1$, e lo dobbiamo confermare calcolando $D_\pm f(1)$: poichè per $-1<x\le 1$ è $f=g$, sarà $\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=Dg(1)=\lim_{x\to1} Dg(x)=1/2$ (la seconda uguaglianza perchè g è derivabile in $x=1$, la terza perchè la funzione

[9]Nota il valore informativo di limiti e segno della derivata prima di questa funzione: se su g avessimo *soltanto* queste informazioni, saremmo già in grado di stabilirne 'qualitativamente' il segno, cioè di stabilire che esiste un $x_0>-1$ (non sapremmo che è uguale ad 1) tale che $g>0$ per $x<-1$ ed $x>x_0$ e $g<0$ per $-1<x<x_0$. Ciò indipendentemente dalla difficoltà della disequazione $g>0$.

Dg è continua in $x = 1$); d'altra parte si trova analogamente $D_+f(1) = -1/2 \neq D_-f(1)$.

(e) $f(x) = x - 2\arctan x$. Ricorda $\arctan x$: dispari, $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$, crescente, convessa per $x < 0$, concava per $x > 0$, passante per l'origine. La nostra f, definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, è anch'essa dispari, e la studieremo per $x \geq 0$, stando attenti, in $x = 0$ dove si uniscono i due pezzi, alla derivabilità (il controesempio guida con f dispari è $\sqrt[3]{x}$, che in zero ha 'tangente verticale'), ai cambi di curvatura, ed ai massimi e minimi. In effetti in questo caso converrebbe studiarla direttamente su tutto $\mathbb{R}$; facciamo così per abituarci a controllare cosa succede nel punto di unione.

Allora: $\lim_{x\to\infty} f = \infty$, e $Df = (x^2-1)/(x^2+1)$; notiamo subito che la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, nessun problema a zero, dove inoltre è diversa da zero, quindi niente massimi o minimi per $x = 0$; il suo segno è immediato, negativa per $0 \leq x < 1$, poi positiva; e $D^2 f = 4x/(x^2+1)^2$, che ha il segno di x e dà un flesso all'origine. Infine, abbiamo trovato un asintoto obliquo di questa funzione in un esempio precedente, $y = x - \pi$.

Grafico per $x \geq 0$: è convessa, parte dall'origine, scende fino al minimo in $x = 1$, poi risale, avvicinandosi alla retta $y = x - \pi$ (che si traccia per prima); per $x < 0$ simmetrico (concava, *andando indietro* sale fino ad $x = -1$ e poi scende, avvicinandosi alla retta $y = x + \pi$).

(f) $f(x) = \dfrac{x^2(x-2)}{x-1}$, una 'funzione razionale fratta'. $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; lì il denominatore è zero e il numeratore no, dunque c'è un asintoto verticale. Vediamo subito i limiti: $\lim_{x\to\pm\infty} f = \infty$, $\lim_{x\to 1^\mp} f = \pm\infty$. Già da questo e dal segno di f (facile) fatti un'idea e disegna. Vediamo $Df = (x-1)^{-2} \cdot x \cdot (2x^2 - 5x + 4)$ (per $x \neq 1$): $(x-1)^{-2} > 0$, la parabola pure ($\Delta < 0$, $a > 0$), sicchè Df ha il segno di x (guarda il tuo disegno; idee confermate?). Per la curvatura, $D^2 = 2(x-1)^{-3}\big(x^3-3x^2+3x-2\big)$; per cercare di scomporre un polinomio di terzo grado si spera che si annulli per qualcuno dei divisori del termine noto, in questo caso $\pm1, \pm2$; controllando questi valori si vede che si annulla per $x = 2$, dunque si può dividere per $x - 2$; facciamo la divisione per ripassarla dalle medie:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 + 3x - 2 & \;x - 2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2} \phantom{{}+3x-2} & \;x^2 - x + 1 \\
-\,x^2 \phantom{{}+3x-2} & \\
\underline{-x^2 + 2x} \phantom{{}-2} & \\
x \phantom{{}-2} & \\
\underline{x - 2} & \\
0 &
\end{array}
$$

Dunque $x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = (x-2)(x^2 - x + 1)$, e il secondo fattore è sempre positivo; conclusione, il segno di $D^2 f = 2 \cdot (x^2 - x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 1)^{-3}$ dà la f convessa per $x < 1$ ed $x > 2$, concava per $1 < x < 2$ —con un flesso in $x = 2$.

Siamo pronti per il grafico: gli zeri sono $x = 0, 2$; per $x < 1$ è convessa scende da infinito all'origine e risale ad infinito per $x \to 1^-$; per $x > 1$ va da meno infinito a più infinito, concava fino ad $x = 2$ dove attraversa l'asse e poi convessa.

(g) $f(x) = \operatorname{arcsen} \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. $D_f = \{x : \frac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1, 1]\} = \mathbb{R}$; ed f è pari, quindi possiamo studiare per $x \geq 0$ (e attenti alla derivabilità in zero). Limiti: $\lim_{x\to0} f = \operatorname{arcsen} 1 = \pi/2$, $\lim_{x\to\infty} f = \operatorname{arcsen}(-1) = -\pi/2$. Per $x > 0$ è $Df(x) = -2/(1 + x^2)$, $D^2 f(x) = 4x/(1 + x^2)^2$. Conclusione, f decresce convessa da $\pi/2$ a $-\pi/2$ per x che va da zero a infinito. Il grafico per $x < 0$ si fa per simmetria, scoprendo il massimo per $x = 0$. Resta da verificare (come sembra dal grafico) che f non è derivabile in $x = 0$, prendendo i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale. Fare questo direttamente è laborioso, quindi osserviamo: per $x > 0$ è $Df(x) = D(-2\arctan x)$, dunque per il teorema di Lagrange $f(x) = -2\arctan x + c$ per un $c \in \mathbb{R}$; allora $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -2\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = -2$; analogamente si trova $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2$, da cui $D_-f(0) \neq D_+f(0)$.

(h) $f(x) = \big|x - |x-1|\big|$. Qui c'è solo da levare il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} |x-(1-x)| = |2x-1| & x \leq 1 \\ |x-(x-1)| = 1 & x > 1 \end{cases} = \begin{cases} 1-2x & x \leq 1/2 \\ 2x-1 & 1/2 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

e poi disegnare i pezzi di rette che formano la f.

(i) $f(x) = \dfrac{\log^2 x}{x}$. $D_f = \mathbb{R}_+$; poichè $f(x) > 0$ per ogni $x \neq 1$ ed $f(1) = 0$ sappiamo subito che c'è un minimo globale in $x = 1$. $\lim_{x\to 0^+} f = \infty$, e $\lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to\infty}(\log x/\sqrt{x})^2 = 0$. E' poi $Df(x) = x^{-2}\log x(2-\log x)$, che ha il segno del prodotto $\log x(2-\log x)$, quindi (diagramma più/meno) è negativa per $x \in (0,1)\cup(e^2,\infty)$ e positiva per $1 < x < e^2$. Da ciò ritroviamo il minimo che conosciamo, ed un massimo in $x = e^2$. $D^2f(x) = 2x^{-3}(\log^2 x - 3\log x + 1)$ che ha il segno della parabola in $\log x$ dentro parentesi; questa ha zeri $\log x = (3\pm\sqrt{5})/2$, ed è positiva all'esterno delle radici; mettendo ad esponente si trova allora che: f è concava per $x_1 \equiv e^{(3-\sqrt{5})/2} < x < e^{(3+\sqrt{5})/2} \equiv x_2$, convessa altrove. Per incolonnare i risultati ottenuti dobbiamo stabilire dove stanno x_1, x_2 rispetto ad $1 = e^0$ ed e^2; poichè $2 < \sqrt{5} < 3$ abbiamo $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$, $\frac{5}{2} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} < 3$, da cui $1 < x_1 < e^2 < x_2$. A questo punto il grafico è chiaro.

(j) $f(x) = \log(1+\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x|)$. Poichè $\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x| \geq 0$ per ogni x, $D_f = \mathbb{R}$. Ha periodo 2π, quindi studiamola in $[0, 2\pi)$. Per $\operatorname{sen} x \leq 0$, cioè da π a 2π, è $\operatorname{sen} x + |\operatorname{sen} x| = 0$ da cui $f(x) = \log 1 = 0$; per $0 < x < \pi$, $f(x) = \log(1 + 2\operatorname{sen} x)$, con $Df = 2(1+2\operatorname{sen} x)^{-1}\cos x$ (che ha il segno di $\cos x$) e $D^2 f = -2(1 + 2\operatorname{sen} x)^{-2}(\operatorname{sen} x + 2) < 0$ in $(0,\pi)$. Sicchè in tale intervallo f, concava, cresce da $x = 0$ (con $f(0) = 0$) a $\pi/2$, dove assume valore massimo $\log 3$ e poi riscende fino ad $x = \pi$ dove riassume valore zero.

(k) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot e^{1/\operatorname{sen} x}$. Anche questa ha periodo 2π e la studiamo in $[0, 2\pi)$, dove è definita per $x \neq 0, \pi$ ($\operatorname{sen} x \neq 0$). Limiti: per $x \to 0^+$, $t \equiv 1/\operatorname{sen} x \to \infty$, sicchè $\lim_{x\to 0^+} f = \lim_{t\to\infty} e^t/t = \infty$; discorso identico per $x \to \pi^-$; per $x \to \pi^+$ abbiamo $\operatorname{sen} x \to 0^-$ da cui $1/\operatorname{sen} x \to -\infty$, $e^{1/\operatorname{sen} x} \to 0$, e $\lim_{x\to\pi^+} f = 0$; infine, facile $\lim_{x\to 2\pi^-} = 0$. *Disegnamo* i limiti, aiutandoci col segno di f, positivo fino a π poi negativo.

$Df(x) = e^{1/\operatorname{sen} x}\big(\cos x - \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}\big) = -(\tan x)^{-1} e^{1/\operatorname{sen} x}(1-\operatorname{sen} x)$, che ha segno opposto a $\tan x$; così f decresce in $(0, \pi/2)$, cresce in $(\pi/2, \pi)$, decresce in $(\pi, 3\pi/2)$, cresce in $(3\pi/2, 2\pi)$ (incolonna). Dunque ha due minimi, in $x = \pi/2$ con $f(x) = e$, ed $x = 3\pi/2$ con $f(x) = -e^{-1}$.

$D^2f(x) = e^{1/\operatorname{sen} x}\operatorname{sen}^{-3} x(1-\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + 1)$, che ha il segno dell'ultimo polinomio; per $x \in (0,\pi)$ è $\operatorname{sen} x > 0$ e dunque $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + 1 > 0$ ed f è convessa; il problema è per $x \in (\pi, 2\pi)$, dove $-1 < \operatorname{sen} x < 0$; ponendo $t = \operatorname{sen} x$, si deve allora studiare il segno del polinomio $t^3 + t + 1 \equiv g(t)$ per $-1 < t < 0$. Questo *non* si annulla per nessun divisore del termine noto, quindi non lo possiamo scomporre; ci accontentiamo di determinare che, poichè $g(-1) = -1$, $g(0) = 1$, e $g'(t) = 3t^2 + 1 > 0\ \forall t \in (-1, 0)$, *allora*: $g(t)$ ha per $-1 < t < 0$ uno ed un solo zero, che chiamiamo t_0 (non sappiamo quant'è), ed è negativa per $-1 \leq t < t_0$ e positiva per $t_0 < t \leq 0$ (perchè crescente). Disegna approssimativamente $g(t)$ in $(-1, 1)$.

Nota che abbiamo saputo 'tutto' tranne il valore preciso di t_0 (altri esempi così nel prossimo paragrafo). Ora dobbiamo tornare su x e $\operatorname{sen} x$: per x che va da π a 2π, $\operatorname{sen} x$ percorre due volte l'intervallo $(-1,0)$; per x da π a $3\pi/2$, $\operatorname{sen} x = t$ va da 0 a -1, quindi $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + 1 = g(\operatorname{sen} x)$ (nel grafico di g percorri l'asse orizzontale da 0 a -1) è positivo fino all'x_1 tale che $\operatorname{sen} x_1 = t_0$, poi negativo; analogamente, per x da $3\pi/2$ a 2π, $\operatorname{sen} x = t$ va da -1 a 0, quindi $\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen} x + 1 = g(\operatorname{sen} x)$ è negativo fino all'x_2 tale che $\operatorname{sen} x_2 = t_0$, poi positivo (se vuoi essere proprio completo, puoi osservare che $x_1 = -\operatorname{arcsen} t_0 + \pi$, $x_2 = \operatorname{arcsen} t_0 + 2\pi$). Sommario di curvatura: f convessa in $(0,\pi)$, poi concava da π ad x_1, convessa da x_1 ad x_2, concava da x_2 a 2π. Dopo aver incolonnato anche questi dati puoi disegnare il grafico.

ESERCIZIO

1. Studia le seguenti funzioni ($f(x) = \dots$):

$$
\begin{array}{rlrl}
(i) & x\log x & (ii) & e^{x^2-2x} \\[2ex]
(iii) & xe^{-x} & (iv) & \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\[2ex]
(v) & (2x^2+3)e^{-|x|} & (vi) & |x| + |2x-1| \\
(vii) & |x+1|e^{-|x-1|} & (viii) & (x+2)(x^2+1) \\
(ix)^{10} & \dfrac{x^3}{2(1+x)^2} & (x) & \dfrac{x}{1-\log|x|} \\
(xi) & x^{\log^2 x} - 1 & (xii) & \left| x - \dfrac{x}{\log x} \right| \\
(xiii) & \log\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}} & (xiv) & \log\left(\dfrac{2|x|-1}{x+2}\right)^2
\end{array}
$$

ANALISI QUALITATIVA DI DISEQUAZIONI

Le disequazioni che possiamo risolvere analiticamente, cioè per le quali esiste un procedimento che conduce ad individuare esattamente la soluzione, sono senz'altro poche. Noi non sappiamo nemmeno risolvere una disequazione di terzo grado, e nessuno sa risolvere quelle di grado alto (se non sbaglio ≥ 5). Oppure, una equazione che contenga sia x che $\ln x$, o sia x che e^x, non si può risolvere (se ci sono x e $\ln x$, se si mette tutto ad esponente spuntano x ed e^x, e se allora si prendono i logaritmi si torna al punto di partenza...). E come abbiamo visto nell'esempio (l) poco fa, di disequazioni di questo tipo nello studio di funzioni se ne incontrano.

Spesso per fortuna basta avere solo informazioni su alcune caratteristiche della soluzione (per esempio nello studio del segno di una

[10] Qui c'è un asintoto obliquo.

derivata potremmo accontentarci di sapere quanti zeri ha, e che segno ha negli intervalli fra i vari zeri), e di queste situazioni ci occupiamo ora, aggiungendo come al solito qualche esempio più facile del primo esempio del libro. Tre esempi di osservazioni che consentono di concludere qualcosa sul segno di una funzione sono raccolti nella seguente (altre analoghe sono 'dietro l'angolo'):

PROPOSIZIONE. *(i)* Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponi che f sia continua su (a, b), che esistano (finiti o meno) $l_1 \equiv \lim_{x \to a^+} f$ ed $l_2 \equiv \lim_{x \to b^-} f$, e che questi abbiano segno opposto ($l_1 \cdot l_2 < 0$); allora esiste $\xi \in (a, b)$ tale che $f(\xi) = 0$. Se f è anche derivabile su (a, b) e Df è sempre > 0 o sempre < 0 allora lo zero è unico.

(ii) Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ ed f ivi derivabile. Se $\lim_{x \to b^-} f \leq 0$ e $Df > 0$ su (a, b), allora $f < 0$ su (a, b).

(iii) Se $f(x_0) \geq 0$ e $Df(x) > 0$ in (x_0, x_1), allora $f(x) > 0$ in $(x_0, x_1]$. E se $f(x_0) \geq 0$ e $Df(x) < 0$ in (x_2, x_0), allora $f(x) > 0$ in $[x_2, x_0)$.

Dim. (i) Facciamo $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$, $l_1 < 0$. Prendi ϵ tale che $l_1 + \epsilon < 0$, $l_2 - \epsilon > 0$; siano $x_\epsilon, \delta_\epsilon$ tali che per ogni $x < x_\epsilon$, $f(x) < l_1 + \epsilon$ e per $x \in (b - \delta_\epsilon, b)$, $f(x) > l_2 - \epsilon$ (x_ϵ, δ_ϵ esistono, definizione di limite). Fissa arbitrariamente $\overline{a} < x_\epsilon$ e $\overline{b} \in (b - \delta_\epsilon, b)$, osserva che $f(\overline{a}) < 0$, $f(\overline{b}) > 0$ e applica il teorema di esistenza degli zeri ad $[\overline{a}, \overline{b}]$. L'asserzione sulla derivata è facile da provare.

(ii) f è crescente, quindi se in (a, b) esistesse x_1 con $f(x_1) \geq 0$, esisterebbe anche x_2 con $f(x_2) > 0$, e per ogni $x > x_2$ sarebbe $f(x) > f(x_2)$, sicchè dovrebbe essere $\lim_{x \to b^-} f \geq f(x_2) > 0$, contro l'ipotesi.

(iii) La seconda: per $x \in [x_2, x_0)$ è (Lagrange) $f(x_0) - f(x) = Df(\xi)(x_0 - x)$ per uno $\xi \in (x, x_0)$; per ipotesi il secondo membro è negativo e il primo è $\geq -f(x)$, sicchè $f(x) > 0$. $\square$

ESEMPI. (a) Si voglia conoscere il segno di $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Non sappiamo calcolare gli zeri di questa f, però: $f'(x) = 3(x^2 - 1)$. Dunque la f parte da $-\infty$, cresce fino ad $x = -1$ dove ha un massimo, poi decresce fino ad $x = 1$ dove ha un minimo per poi risalire fino a ∞. Per capire quanti zeri ha, usando la (i) qui sopra, basta calcolare i valori che f assume in $x = \pm 1$. Poichè $f(-1) = 3, f(1) = -1$, c'è uno zero $x_1 < -1$, uno $x_2 \in (-1, 1)$, e l'ultimo $x_3 > 1$. E abbiamo $f(x) < 0$ per $x < x_0$ ed $x \in (x_2, x_3)$ ed $f(x) > 0$ per $x \in (x_1, x_2)$ ed $x > x_3$.

Così non abbiamo trovato gli zeri di f, ma abbiamo visto quanti sono e dove sono approssimativamente, e sul segno di f abbiamo visto la struttura degli intervalli in cui è positivo o negativo.

(b) Si voglia il segno di $f(x) = x^2 + 2x\sqrt{x} - 3x - 4$. Scrivendo $f = 2x^{3/2} - (4 - x)(x + 1)$, si vede che è una differenza fra una funzione convessa crescente e una parabola discendente. Disegnando si vede subito che c'è un solo zero x_0 e che $f \lesseqgtr 0$ per $x \lesseqgtr x_0$ (ovviamente sempre $x \geq 0$). $x_0 \in (2, 3)$.

Per farla un pò più rigorosa, la f è convessa, e per $f' = 2x+3\sqrt{x}-3$, crescente, abbiamo $f'(0) < 0$ e $\lim_{x\to\infty} f' = \infty$, dunque f' ha un solo zero x_0' con $f' \lesseqgtr 0$ per $x \lesseqgtr x_0'$; allora f parte da $f(0) < 0$, decresce fino ad x_0' e poi cresce, con $\lim_{x\to\infty} f = \infty$. Conclusione: f ha un solo zero.

(c) *E' importante*, e si usa spesso, la seguente disuguaglianza:

$$\ln x < x - 1 \quad \forall x \neq 1, > 0$$

(p.206 nel libro), graficamente ovvia. Si dimostra facile usando la (iii) di sopra, con $f(x) = x - 1 - \ln x$ (ed $x_0 = 1$). [11]

Un'altra versione di questa disuguaglianza (verifica) è:

$$\ln(1 - \frac{1}{t}) > \frac{1}{1-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus [0, 1].$$

(d) Studiamo il segno di $f(x) = e^x(1-2x)-x$ per $x \geq 0$. $\lim_{x\to 0^+} f = 1$ e $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$; inoltre, $f' < 0\ \forall x$. Dunque esiste un solo zero x_0, ed $f \gtreqless 0$ se $x \lesseqgtr x_0$. Poichè $f(\frac{1}{2}) < 0$, $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$.

(e) Facciamo $f(x) = x(1 - \ln x) + e^x(1 - x\ln x)$ che si affronta nello studio di crescenza e decrescenza di $\ln x/(x+e^x)$ (perchè?). Osserviamo che per $0 < x \leq 1$ $f > 0$ e per $x \geq e$ $f < 0$. Resta $1 < x < e$. Ma $f(1) > 0$, $f(e) < 0$, ed $f'(x) = -\ln x - (1 + x)e^x \ln x < 0$ in questo intervallo, quindi c'è un solo zero x_0, ed $f \gtreqless 0$ per $x \lesseqgtr x_0$ (implicazioni per crescenza/decrescenza di $\ln x/(x + e^x)$?).

(f) Numero di Nepero. Guardiamo la 'magia' di e in una manifestazione geometrica (di nuovo scusate l'assenza di figure). Considera, per $a > 1$, le funzioni $f_1(x) = \log_a(x + 1)$ ed $f_2(x) = a^x - 1$. I grafici hanno l'origine in comune, nel senso che $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Problema: Trova $a > 1$ tale che queste due funzioni hanno nell'origine *tangente* comune.

Pòsto, per $x > -1$, $f = f_1 - f_2$, il problema dice trova a tale che $f'(0) = 0$. Ma $f'(x) = \frac{1}{x+1}\log_a e - a^x \log_e a$, da cui (facile) l'unica soluzione è $a = e$.

A che ci siamo: che succede per $a \lesseqgtr e$? Facciamo $a < e$. In tal caso $f'(0) > 0$ sicchè $\log_a(x + 1)$ è più ripida in zero; inoltre $\lim_{x\to -1^+} f = \lim_{x\to\infty} f = -\infty$; da ciò, a dal fatto che questa è concava e l'altra convessa, intuitivamente la risposta è che il log 'supera' l'esponenziale a zero e poi la riincrocia a un certo punto, per rimanerle sotto. Per confermare questo studiamo la f': $\lim_{x\to -1^+} f' = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f' = -\infty$, ed $f''(x) < 0\ \forall x > -1$; dunque f' decresce, è continua ed attraversa l'asse orizzontale, sicchè esiste unico $\bar{x}$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$, con $\bar{x} > 0$ perchè $f'(0) > 0$. Allora la f sale da $-\infty$, attraversa l'asse orizzontale

[11] Altra dimostrazione: $\ln x$ è strettamente concava ($D^2 \ln x = -1/x^2 < 0\, \forall x > 0$), quindi sta sotto le tangenti, in particolare sotto a quella in $x_0 = 1$ che è appunto $r(x) = x - 1$.

in $x = 0$, raggiunge il massimo in $\bar{x}$ e poi riscende verso $-\infty$ riattraversando l'asse orizzontale in un $\alpha > \bar{x} > 0$. Traducendo questo in termini di f_1 ed f_2 si vede che è quello che volevamo.

Il caso $a > e$ a voi.

ESERCIZI

1. Dimostra che: Se $f(x_0) \leq 0$ e $Df(x) < 0$ in (x_0, x_1), allora $f(x) < 0$ in $(x_0, x_1]$.

2. Dimostra che $\tan x > x + x^3/3$ $\forall x \in (0, \pi/2)$ (cfr. esempio (c)).

3. (i) Riconduci all'esempio (c) di sopra la disuguaglianza:

$$\ln \frac{x+1}{x} > \frac{1}{1+x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 0].$$

(ii) Usa il risultato trovato per dimostrare che $(1 + \frac{1}{x})^x$ è crescente.

4. Studia il segno di $x - \ln x + e^x(1 - \ln x)$. Come nell'esempio (e), guarda prima se ci sono intervalli in cui la cosa è evidente.

5. Studia crescenza/decrescenza di $f(x) = \dfrac{\log|x+1|}{x}$.

ALTRI DUE GRAFICI

Questi due sono sul difficile.

(a) $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$. Dominio $x \neq 0$. E' dispari quindi la possiamo studiare per $x > 0$. Non esiste $\lim_{x \to 0^+} f$, e $\lim_{x \to \infty} f = 0$. Per il resto, f non è periodica, però quando x scende da un x_0 arbitrario a $\frac{1}{1+2\pi x_0} x_0$, $\frac{1}{x}$ sale da $y_0 = \frac{1}{x_0}$ ad $y_0 + 2\pi$ e quindi $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ compie un ciclo completo. Con $x_0 = \frac{1}{2\pi}$ è $\frac{1}{1+2\pi x_0} x_0 = \frac{1}{4\pi}$, così $\frac{1}{x}$ descrive $[2\pi, 4\pi]$. Studiata f in tale intervallo sapremo tutto, perchè poi il comportamento si ripete in $[\frac{1}{6\pi}, \frac{1}{4\pi}]$, $[\frac{1}{8\pi}, \frac{1}{6\pi}]$ e così via; ed in $[\frac{1}{2\pi}, \infty)$ (in cui $\frac{1}{x}$ descrive l'intervallo $(0, 2\pi]$).

$Df(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x}$; quindi partendo da $\frac{1}{2\pi}$ (*a scendere*) avremo un intervallo in cui f decresce, uno in cui cresce ed uno in cui decresce. E' chiaro che il minimo è -1 e il massimo è 1.

$D^2 f(x) = \frac{1}{x^3} \cdot (2 \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x})$. Poniamo $t = \frac{1}{x}$ e studiamo $g(t) = 2 \cos t - t \operatorname{sen} t$ in $[2\pi, 4\pi]$, equivalentemente in $[0, 2\pi]$. $g(t) = t \cos t (\frac{2}{t} - \tan t)$; il segno della funzione in parentesi si vede disegnando $\frac{1}{t}$ e $\tan t$; mettendo insieme questo e $\cos t$ vediamo che g parte positiva, poi diventa negativa e poi di nuovo positiva per t che va da zero a 2π. Quindi a scendere da $x = \frac{1}{2\pi}$, f è prima convessa poi concava e poi di nuovo convessa (e lo stesso succede a salire da $x = \frac{1}{4\pi}$).

Conclusione, salendo da $x = \frac{1}{4\pi}$ troviamo che f scende convessa da zero al minimo -1, poi sale fino al massimo 1 diventando a un certo punto concava, poi riscende fino a zero cambiando di nuovo curvatura prima di arrivarci.

(b) $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$. Dominio per base positiva, cioè $(-\infty,-1)\cup(0,\infty)$. I limiti, sappiamo che $\lim_{x\to\pm\infty} f = e$, è immediato $\lim_{x\to -1^-} f = \infty$, e poi $\lim_{x\to 0^+} f = 1$ perchè scrivendo $f = e^{\ln f}$, nella variabile $z = 1/x \to \infty$ si trova $\lim_{x\to\infty} \ln f = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+z)}{z} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+z)}{1+z}\frac{1+z}{z} = 0$.

$Df(x) = f(x)\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}\right)$ che abbiamo visto essere sempre positivo parlando di disequazioni; dunque f cresce.

Per la curvatura, con qualche passaggio si arriva ai risultati che seguono. $D^2f(x) = f(x)\cdot\left(\ln^2(1+\frac{1}{x}) - \frac{2}{1+x}\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{(1+x)^2}(1-\frac{1}{x})\right) \equiv f\cdot f_1$; poichè $f>0$ si deve studiare il segno di f_1. Lo facciamo separatamente per $x>0$ e $x<-1$.

$x>0$. Facile $\lim_{x\to\infty} f_1 = 0$. Allora speriamo $Df_1(x) > 0\ \forall x>0$, perchè allora sarà $f_1(x) < 0\ \forall x>0$ (dimostra), cioè f concava (e finiamo). Risulta $Df_1 = \frac{1}{x(1+x)^2}\cdot\left(-2\ln(1+\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}\frac{5x+1}{x+1}\right) \equiv \frac{1}{x(1+x)^2}\cdot f_2$. Per studiare il segno di f_2, osserviamo che $\lim_{x\to\infty} f_2 = 0$. E' $Df_2 < 0$, che implicherebbe $f^2 > 0$? Si, $Df_2 = -\frac{3x^2+1}{x^2(1+x)^2} < 0$.

$x<-1$. Lavoriamo con $z=-x>1$; la f_1 diventa $g(z) = \ln(1-\frac{1}{z})\left(\ln(1-\frac{1}{z}) + \frac{2}{z-1}\right) + \frac{1}{(z-1)^2}(1+\frac{1}{z})$. Facile $\lim_{z\to\infty} g = 0$. Se $Dg(z) < 0\ \forall z>1$, allora $g>0$ ed f è convessa per $x<-1$. Abbiamo $Dg = \frac{1}{z(z-1)^2}\left(-2\ln(1-\frac{1}{z}) - \frac{5z-1}{z(z-1)}\right)$. Ricordando che per $z\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$ è $\ln(1-\frac{1}{z}) > \frac{1}{1-z}$ troviamo

$$Dg < \frac{1}{z(z-1)^2}\left(\frac{2}{(z-1)} - \frac{5z-1}{z(z-1)}\right) = \frac{1}{z^2(z-1)^3}(-3z+1) < 0\ \forall z>1.$$

Conclusione: la f sale convessa da e a infinito per x che va da meno infinito a meno uno; e sale concava da uno ad e per x che va da zero a infinito.

ESERCIZI 4.5

1. Dimostra che: se $\lim_{x\to\infty} f' > 0$, allora $\lim_{x\to\infty} f = \infty$.

2. (i) Trova $a>1$ tale che $\log_a(x+1)$ e a^x-1 hanno tangente comune in $x=0$. (ii) Metti in una stessa figura queste due funzioni con $a\in(1,e)$.

SEZIONE 4.6: POLINOMI E SERIE DI TAYLOR

Introduzione: Approssimando una funzione derivabile con una retta l'errore tende a zero più velocemente di $x-x_0$, dalla formula $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\omega(x-x_0)$. Se la funzione è una retta, $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) \equiv f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, l'errore è zero. Troveremo adesso che approssimando una funzione derivabile n volte con un polinomio di grado n l'errore va a zero più veloce di $(x-x_0)^n$. Vediamo che polinomio si deve usare per avere errore zero nel caso in cui la funzione sia polinomiale, $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n$. Poichè $D^k z^n = n(n-1)\ldots(n-k+1)z^{n-k}$ se $k \leq n$ e zero se $k > n$, abbiamo $D^k f(x_0) = k! a_k$ per $k \leq n$, e dunque in questo caso

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + \frac{D^2 f(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{D^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Il teorema di questo paragrafo dice che se f non è polinomiale ma è C^n allora sarà uguale al polinomio qui sopra più un resto che tende a zero più veloce di $(x - x_0)^n$.

Ora due applicazioni del Teorema 4.42. La prima riguarda le condizioni locali per i massimi e minimi. Per vedere di cosa si tratta considera $f(x) = x^4$. Sappiamo che ha un minimo in $x_0 = 0$, ma dalle prime due derivate non lo vediamo, perchè $Df(0) = D^2 f(0) = 0$ e in effetti anche $D^3 f(0) = 0$. La domanda è: guardando alle derivate successive di f nel punto, si può generalizzare la proposizione 4.36 e trovare condizioni sufficienti per massimi e minimi? La risposta è si, e la registriamo come

PROPOSIZIONE. Sia f di classe C^n in un intorno di x_0; supponi che $Df(x_0) = D^2 f(x_0) = \ldots = D^{n-1} f(x_0) = 0$ e $D^n f(x_0) \neq 0$. Allora:

(i) Se n è pari, allora x_0 è massimo se $D^n f(x_0) < 0$, minimo se $D^n f(x_0) > 0$;

(ii) Se n è dispari, f è crescente se $D^n f(x_0) > 0$ e decrescente se $D^n f(x_0) < 0$, ed x_0 è un flesso.

Dim. Le ipotesi sulle derivate di f ed il teorema 4.42 implicano che $f(x_0 + h) - f(x_0) = h^n \left(\frac{D^n f(x_0)}{n!} + \omega(h) \right)$, ed il teorema della permanenza del segno implica che per h piccolo abbastanza l'espressione in parentesi ha il segno di $D^n f(x_0)$. Le conclusioni sui massimi/minimi e crescenza/decrescenza seguono facilmente da questo. Per esempio se n è pari e $D^n f(x_0) > 0$, poichè $h^n > 0$ è $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ in un intorno di x_0, che è perciò minimo. Per l'asserzione sul flesso: posto $g = D^2 f$ si ha $D^n f = D^{n-2} g$ ed $n - 2$ dispari. Dalla parte dimostrata segue che g cresce o decresce in x_0; ma $g(x_0) = 0$ quindi $g = f''$ cambia segno in x_0, cioè x_0 è un flesso. $\square$

Per x^4 si ha $D^4 f(0) > 0$, da cui come sapevamo lo zero è un minimo per f. La seconda applicazione è di natura diversa. La domanda è, se facciamo tendere n ad infinito nell'approssimazione, ritroviamo f esattamente, cioè $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$? Risposta è: non sempre, ma in molti casi importanti si. Vediamone alcuni.

ESEMPI. **(a)** $f(x) = e^x$ con $x_0 = 0$. Dal teorema 4.42 $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$ con ξ fra zero ed x; dalla posizione di ξ, $e^{\xi} \leq \max\{1, e^x\}$; dunque

$\forall x, R_n(x) \to 0$ da cui

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Nota che in particolare $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(b) $f(x) = \ln(1+x)$. [12] Fissa $x \in (-1, 1)$. Ricorda che $1 - x^{n+1} = (1-x)(1 + x + \cdots + x^n)$; da questa ricaviamo $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$, e scrivendo $-x$ al posto di x otteniamo $\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x}$. Integrando entrambi i membri da 0 ad x (minore o maggiore di 0) arriviamo a $\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt$; ma per $|t| \le |x| < 1$ è $\left| \frac{t^{n+1}}{1+t} \right| \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \le \epsilon$ per n sufficientemente grande (ed ϵ arbitrario); per tali n sarà quindi $\left| (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t} dt \right| \le |x| \epsilon$; sicchè (definizione di limite):

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots.$$

Domanda: non potevamo fare più semplicemente come nell'esempio precedente? Si, ma solo per $-1/2 \le x < 1$. [13]

(c) $f(x) = \operatorname{sen} x$. Applichiamo la proposizione 4.43: $|D^n f(x)| \le 1 \ \forall x$; dunque con $x_0 = 0$ otteniamo per ogni x

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Analogamente si trova

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

INFINITESIMI E INFINITI

Chi va più veloce di chi? Per $x \to \infty$ la funzione esponenziale (con $a > 1$) va a infinito più veloce di tutte le potenze di x (da cui il detto 'crescita esponenziale'):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty \ \forall a > 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

---

[12]Cfr. esempio 3.30 pag. 180 (che usa il teorema di integrazione per serie) e Proposizione 4.12 (che usa quello di derivazione per serie).

[13]Dettagli: Con $x_0 = 0$, per $-1/2 \le x < 1$ si ha $|R_n(x)| = \frac{1}{n+1} \cdot \left| \frac{x}{1+\xi} \right|^{n+1} \to 0$ (perchè per $x \ge 0$ si ha $0 \le x < 1 < 1 + \xi$, e per $-1/2 \le x < 0$ —e ξ fra x e zero— è $|x| \le 1/2 < 1 + \xi$, quindi in entrambi i casi $|x/(1+\xi)| < 1$); di qui il risultato. Per $-1 < x < 1/2$ non basta sapere che $x < \xi < 0$ perchè in tal caso $x < -(1+x) < 0$ sicchè $x < \xi < 0$ non implica direttamente $-(1+x) \le \xi < 0$, equivalente a $|x/(1+\xi)| \le 1$.

Questo segue dal teorema 4.8 e dal limite (fatto con le successioni) $a^{x_n}/x_n^\alpha \to \infty \; \forall x_n \to \infty$. Il logaritmo (base $a > 1$) ci va più lento di tutte:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0 \; \forall \alpha > 0$$

Per vedere questo dal precedente scrivi, con $\log_a x = z \to \infty$, $\log_a x/x^\alpha = (z^{1/\alpha}/a^z)^\alpha$. Molti limiti si riconducono a questa coppia. Tre esempi:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to\infty} x - \ln x \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \; \forall \alpha > 0.$$

Per l'ultimo, che torna spesso utile, lavora con $z = 1/x \to \infty$.

I simboli di Landau: $f = o(g)$ per $x \to x_0$ vuol dire che f diventa infinitamente più piccola di g per $x \to x_0$. Se sono entrambi infiniti ciò vuol dire che f va ad infinito più lenta di g; se sono infinitesimi, che f va a zero più veloce di g.

Aggiungiamo qualche esempio in cui si lavora con le parti principali. Intanto conviene registrare alcune facili conseguenze delle definizioni. Siano $f, g, g_1, g_2, f \circ g_1$ infinitesimi o infiniti per $x \to x_0$; allora (sottinteso per $x \to x_0$):

- (c1) $f \sim cg \Leftrightarrow f = cg + o(g)$
- (c2) Se $f \sim g$ allora: $\exists \lim f \Leftrightarrow \exists \lim g$, e se esistono sono uguali
- (c3) Se $f_1 \sim g_1$ ed $f_2 \sim g_2$ allora $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$, e se esiste $\lim \frac{f_1}{f_2}$ anche $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$
- (c4) $g = o(f) \Leftrightarrow f + g \sim f$
- (c5) Se $f = f_1 \cdot f_2$ ed $f_2 \to 1$ allora $f \sim f_1$
- (c6) Nei casi in cui si può applicare il teorema sui limiti di funzioni composte: se $g_1 \sim g_2$ allora $f \circ g_1 \sim f \circ g_2$.

ESEMPI. (a) $x \to \infty$: applicando il principio di sostituzione degli infiniti si trova $\frac{x^2 - x^3}{1 + x^2\sqrt{x}} \sim \frac{-x^3}{x^{5/2}} = -\sqrt{x}$.

(b) $x \to -\infty$: per $f = x - \sqrt{x^2 + x^4}$ si trova $f/(-x^2) \to 1$, cioè $f \sim -x^2$.

(c) $x \to 0$: $x(1 - \cos x) = x \cdot x^2 \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \sim x^3/2$ usando **??**.

(d) $x \to -\infty$: $x^3(3 + \frac{\cos x}{x}) \sim 3x^3$ perchè la funzione in parentesi tende 3.

(e) $x \to 0^+$: $f = \sqrt{x + x^2}$. Poichè $x^2 = o(x)$, da **??** $x + x^2 \sim x$; allora da **??** $f \sim \sqrt{x}$.

(f) Calcolare $\lim_{x\to\infty} (2^x - x^x)/(4^x - x^{2x})$. Poichè $2^x = o(x^x)$, $4^x = 2^{2x} = o(x^{2x})$ abbiamo $f \sim (x^x)/(x^{2x}) \to 0$, dunque $f \to 0$ da **??**.

(g) Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt[4]{1 + \tan x} - 1}{\operatorname{sen} \ln(1 + \sqrt[3]{x})} \right)^{\dfrac{1 - \cos 6x}{\arctan x}}.$$

Per l'esponente: dividendo e moltiplicando per $(6x)^2, 2, x$, usando **??** troviamo che l'esponente $\sim 18x$. Per la base, scrivendo

$$\frac{\sqrt[4]{1+\tan x}-1}{\operatorname{sen}\ln(1+\sqrt[3]{x})} = \frac{\sqrt[4]{1+\tan x}-1}{\tan x}\cdot \tan x \cdot \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{\operatorname{sen}\ln(1+\sqrt[3]{x})}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\ln(1+\sqrt[3]{x})}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

si vede che la base è $\sim x^{2/3}/4$. Sappiamo da $f^g = e^{g\ln f}$ e dal teorema LFC che dobbiamo calcolare il limite di $g\ln f$. Usando **??** per stabilire che se $f_1 \sim f_2$ allora $\ln f_1 \sim \ln f_2$ ed applicando **??** al prodotto $g\ln f$ otteniamo $g\ln f \sim 18x\ln(x^{2/3}/4) \to 0$ (da $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$). Dunque (usando **??** e **??**) il nostro limite vale $e^0 = 1$.

ESERCIZI 4.6

1. Dimostra **??**-**??** (Per L'ultima asserzione di **??** scrivi $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2} = \frac{f_1}{g_1}\cdot\frac{1+f_2/f_1}{1+g_2/g_1}$ ed usa **??**).

2. Applica la tecnica usata nel limite 'difficile' degli esempi di sopra per calcolare:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1}{1-\cos\frac{1}{x}}\right)^{\dfrac{x+1}{x^4+x+1}}.$$

3. Calcola:

$$(i)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2^x}-\frac{1}{3^x} \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0}\arctan^4 x\cdot\ln(1-\cos x)$$

4. Studia $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ in $(0, 2\pi]$. Per gli eventuali massimi, minimi e flessi basta dire in quali intervalli di ampiezza $\pi/2$ si trovano. [14]

[14]Soluzione: La f decresce concava con $\lim_{x\to 0^+} f' = 0$, ha un flesso fra $\pi/2$ e π, attraversa lo zero a π, ha un minimo fra π e $\frac{3}{2}\pi$ e poi, convessa fino ad un secondo flesso fra $\frac{3}{2}\pi$ e 2π poi concava, cresce fino a 2π dove è zero. Perchè: $Df = x^{-2}(x\cos x - \operatorname{sen} x)$; per fare il limite per $x\to 0^+$ aggiungi e togli 1 a $\cos x$. Il resto è studio di segni di f' ed f'', non difficile a questo punto.