- **PROBABILITÀ**

Una lotteria, o esperimento, con possibili risultati in $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ è indicata così: $(p_1,x_1;p_2,x_2;\dots;p_n,x_n)$, dove p_i, $i=1,\dots,n$ è la probabilità con cui si verifica x_i. Le p_i soddisfano: $p_i\geq 0\ \forall i$, $\Sigma_i p_i = 1$. [1]
Se $f:X\to\mathbb{R}$ è una funzione su X, il valore atteso di f è definito come $\mathbb{E}_p f = \Sigma_i p_i f(x_i)$ ($\mathbb{E}$ = "expectation"; sottoscritto p indica $p=(p_1,\dots,p_n)$).
Due esperimenti indipendenti $(x_1,p_1;\dots;x_n,p_n)$ e $(y_1,q_1;\dots;y_m,p_m)$ hanno possibili risultati in $X\times Y$, cioè le coppie (x_i,y_j), $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$, e rispettive probabilità $p_i q_j$ [dunque se $f:X\times Y\to\mathbb{R}$, $\mathbb{E}f=\Sigma_{i,j}p_iq_jf(x_i,y_j)$].
Analogo il caso di n esperimenti.

- **ESTENSIONE MISTA DI UN GIOCO** $\langle N,(A_i)_{i\in N},(u_i)_{i\in N}\rangle$, A_i finiti.

Per ogni i, estendi l'insieme $A_i\equiv\{a_{i1},\dots,a_{in_i}\}$ all'insieme di tutte le possibili lotterie su A_i. Una tale lotteria, $(p_{i1},a_{i1};\dots;p_{in_i},a_{in_i})$ si chiama strategia mista. Le strategie miste includono quelle originali, o 'pure'; per es. a_{i1} è la lotteria $(1,a_{i1};0,a_{i2};\dots;0,a_{in_i})$, ecc. Assumi che le strategie miste dei vari giocatori sono indipendenti, e che i giocatori valutano le lotterie su $A\equiv A_1\times\dots\times A_N$ secondo l'utilità attesa.[2] Dunque se il giocatore i adotta la strat. $\alpha_i=(p_{i1},a_{i1};\dots;p_{in_i}a_{in_i})$, $i=1,\dots N$, avremo

$$U_i(\alpha_1,\dots,\alpha_n)=\Sigma_{j_1=1}^{n_1}\dots\Sigma_{j_N=1}^{n_N}p_{1j_1}p_{2j_2}\cdots p_{Nj_N}u_i(a_{1j_1},\dots,a_{Nj_N}). \qquad (\star)$$

---

[1] $p=(p_1,\dots,p_n)$ è allora una "distribuzione di probabilità su X".
[2] Cioè, secondo il valore atteso di u_i.

Un <u>equilibrio</u> dell'estensione mista di un gioco è definito come sempre: $(\alpha_1^*, \dots, \alpha_N^*)$ è equil. se $\forall i\ \forall \alpha_i\ \ U_i(\alpha_1^*, \dots \alpha_N^*) \geq U_i(\alpha_{-i}^*, \alpha_i)$. <u>ESEMPIO</u> (Tab 7.7 di Schotter):

	R	A
R	5, 8	6, 6
A	8, 0	2, 3

$A_i = \{R, A\}$ $i = 1,2$. Una lotteria su A_1 è $(p, A; 1-p, R)$, che indicheremo con p — perché p la determina univocamente. Una lotteria su A_2 è $(q, A; 1-q, R)$, abbreviata q. Sappiamo che <u>non</u> ci sono equil. in strategie pure. Per trovare gli equilibri in strat. miste osserviamo in un tale equilibrio entrambi adotteranno miste non degeneri (cioè non 'pure') — questo è facile. Poi applichiamo (*) per calcolare U_1, U_2:

$$U_1(p,q) = p \cdot q \cdot 5 + p(1-q)6 + (1-p)q \cdot 8 + (1-p)(1-q)2 = (4-7q) \cdot p + (2+6q)$$
$$U_2(p,q) = pq\,8 + p(1-q)\,6 + (1-p)q \cdot 0 + (1-p)(1-q) \cdot 3 = (5p-3) \cdot q + (3+3p).$$

Oss. che U_1 è una retta in p (dato q), e U_2 una retta in q (dato p). Dunque se $(p,q) \neq (\frac{3}{5}, \frac{4}{7})$ per almeno un giocatore la best response all'altro sarebbe pura, sicché per tali valori non c'è equilibrio. Invece con $p = 3/5$, $q = 4/7$ è immediato verificare che entrambi giocano best responses; <u>conclusione</u>, l'eq. misto è

$$\alpha_1^* = \left(\tfrac{3}{5}, A; \tfrac{2}{5} R\right), \quad \alpha_2^* = \left(\tfrac{4}{7}, A; \tfrac{3}{7}, R\right).$$

- <u>GIOCHI IN FORMA "COALIZIONALE"</u> N insieme giocatori. $\forall S \subseteq N$, $v(S)$ = valore della coalizione S. $(x_1, \dots, x_N) \equiv (x_i)_{i \in N}$, $x_i \in \mathbb{R}$ è una <u>allocazione di utilità</u>. In generale per $S \subseteq N$, $(x_i)_{i \in S}$ è una S-allocazione (alloc. per i membri di S). $(x_i)_{i \in S}$ è <u>S-possibile</u> se $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$. Una allocazione N-possibile $(x_i)_{i \in N}$ è nel <u>CORE</u> del gioco se non esiste $S \subseteq N$ ed $(y_i)_{i \in S}$ S-possibile con $y_i > x_i\ \forall i \in S$. Oss che se $(x_i)_{i \in N}$ è nel core, $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$, ed è <u>Pareto efficiente</u> ($\nexists (y_i)_{i \in N}$ N-possibile con $y_i > x_i\ \forall i \in N$).