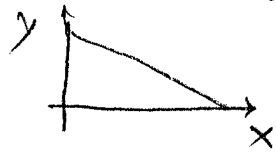
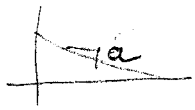
GAINS FROM TRADE

S MODICA
2.II.07

Due beni x, y e due agenti A, B.
Frontiere lineari  di produzione.

Da status quo:

$$(1)\quad \begin{aligned} \Delta y_A &= -a\,\Delta x_A \\ \Delta y_B &= -b\,\Delta x_B \end{aligned}$$



Per fissare le idee: $b > a$.

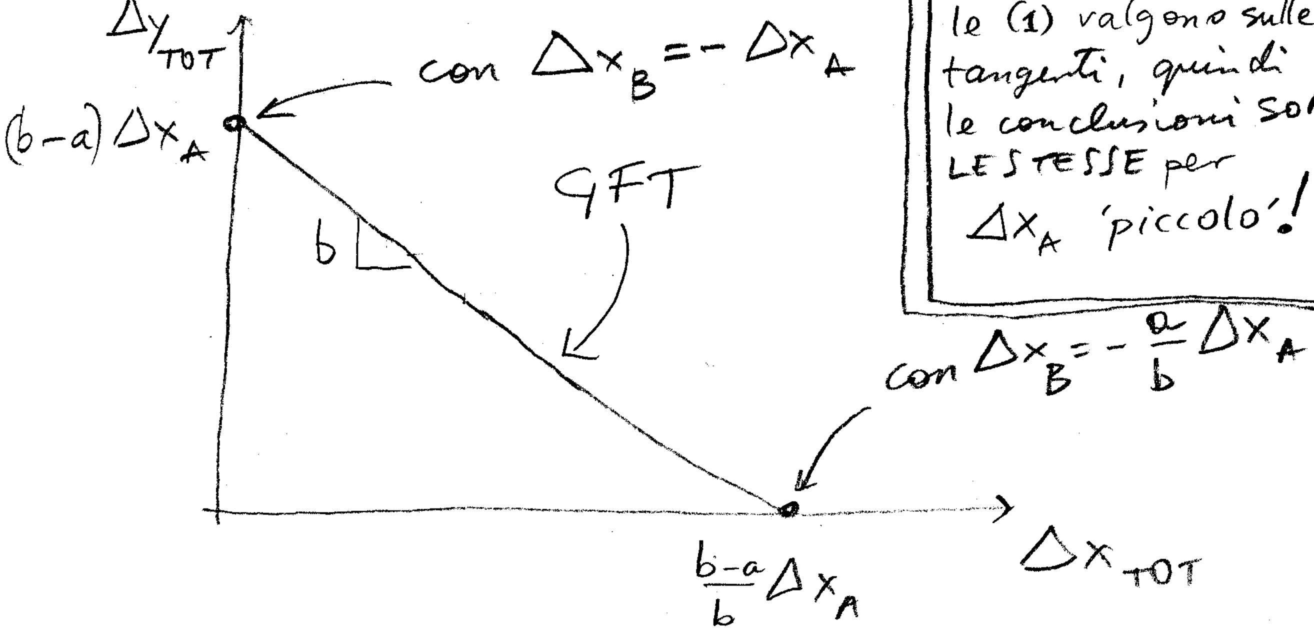
$$\Delta y_{TOT} \equiv \Delta y_A + \Delta y_B, \quad \Delta x_{TOT} \equiv \Delta x_A + \Delta x_B$$

<u>Def</u> $GFT \equiv (\Delta y_{TOT}, \Delta x_{TOT})$.

<u>Prop.</u> In contesto lineare, l'insieme dei possibili GFT è la retta

$$b\,\Delta x_{TOT} + \Delta y_{TOT} = (b-a)\,\Delta x_A.$$

Dim. Calcola 1° membro. □



⚠ In contesto NON lineare, le (1) valgono sulle tangenti, quindi le conclusioni SONO LE STESSE per Δx_A 'piccolo'!

PROBLEMA DELL'IMPRESA COMPETITIVA

S. MODICA
4.III.07

- Produce $q = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n_+$

  f tecnologia, data

- Massimizza Profitti $\equiv$ Ricavi $-$ Costi

$$\max_x \; p f(x) - \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

con p prezzo prodotto, w_i prezzo fattore $i = 1, \dots, n$

- Lemma Se $A \subset \mathbb{R}^n$, $A = \cup_\alpha A_\alpha$ con $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset$ allora

$$\max_{x \in A} f(x) = \max_\alpha \max_{x \in A_\alpha} f(x).$$

- Dunque, $\max_x p f(x) - \sum_i w_i x_i$

$$= \max_q \max_{\{x : f(x) = q\}} p f(x) - \sum w_i x_i$$

$$= \max_q \; pq - \underbrace{\min_{f(x)=q} \sum w_i x_i}_{c(q;\,w)}$$

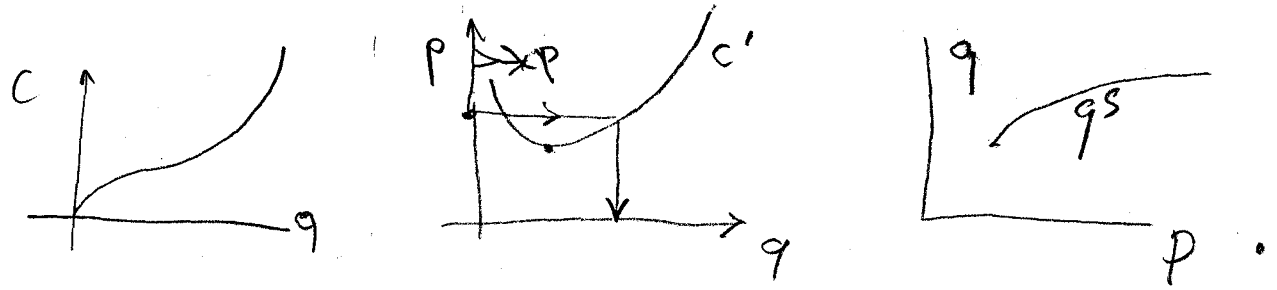
- Da ciò QUANTITÀ OFFERTA $q^S(p; \underbrace{w, f}_{\text{CAUSANO SPOSTAMENTI DELLA CURVA}})$ risolve

$$\max_q \; pq - c(q),$$

cioè soddisfa

$$p = c'(q) \quad \text{con } c''(q) > 0$$

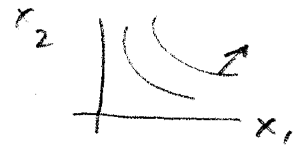
- CONCLUSIONE, Il prezzo di offerta come funzione di q è la parte crescente di c'; la qtà offerta è la sua inversa:



S. MODICA
6. iii. 07

SCELTA CONSUMATORE

- Panieri $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$
- Preferenze $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, in genere
  - MONOTONE: $\forall i \; x_i \geq z_i \;\&\; \exists i \; x_i > z_i \Rightarrow u(x) > u(z)$
  - CONVESSE: $u(x) = u(y) \Rightarrow u(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq u(x), \; \lambda \in (0,1)$



- Dotazione iniziale $x^0 \in \mathbb{R}^n_+$
- Prezzi $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$
- PROBLEMA (PC)

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n_+} u(x)$$

sogg. a

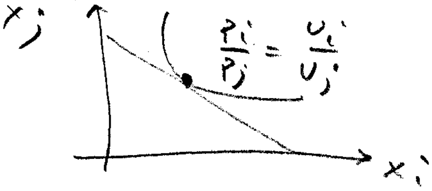
$$\underbrace{\Sigma_i p_i x_i}_{\text{SPESA}} \leq \underbrace{\Sigma_i p_i x_i^0}_{\text{BUDGET}} \equiv m \qquad (VB)$$

- La soluzione x^*, DATA u, è funzione di (p, m):

$$x^* = x^*(p, m).$$

- ES: se u è monotona, $\Sigma_i p_i x_i^* = m$.

- PROP $\quad x_i^* \cdot x_j^* > 0 \Rightarrow \frac{u_i}{p_i} = \frac{u_j}{p_j} \quad \left[u_i = \frac{du}{dx_i}(x^*) \right]$



Dim Supponi x soddisfa VB; allora con $\Delta x_j = -p_i \Delta x_i / p_j$ e $\Delta x_k = 0 \; \forall k \neq i, j$, anche $x + \Delta x$ lo soddisfa. Con questo Δx abbiamo $|\Delta x|^2 = \Delta x_i^2 \left(1 + (p_i/p_j)^2\right)$. Dunque

$$\Delta u = u_i \Delta x_i + u_j \Delta x_j + o(|\Delta x|)$$

$$= \Delta x_i \left[u_i - u_j \frac{p_i}{p_j} + \underbrace{\frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}}_{\xrightarrow[\Delta x_i \to 0]{} 0} \left(1 + \left(\frac{p_i}{p_j}\right)^2\right)^{1/2} \right] \text{ da cui}$$

se $\frac{u_i}{u_j} \neq \frac{p_i}{p_j}$

per Δx_i suff. piccolo $\Delta u > 0$ con $\Delta x_i \left(u_i - u_j \frac{p_i}{p_j}\right) > 0$. $\square$

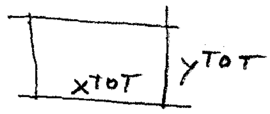
EDGEWORTH BOX

S. MODICA
6. III. 07

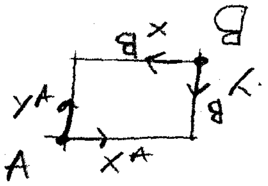
- Due individui A, B
- Due beni x, y. Dotazioni (x_0^A, y_0^A), (x_0^B, y_0^B);

Totali $x^{TOT} = x_0^A + x_0^B$, $y^{TOT} = y_0^A + y_0^B$.

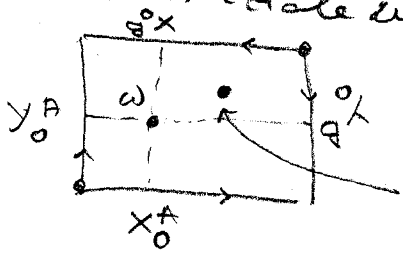
Scatola di lati x^{TOT}, y^{TOT} :



Origini:

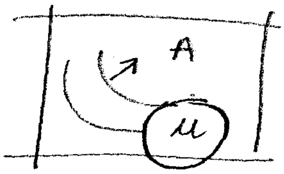


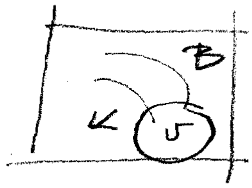
Dotaz. iniziale ω:



allocazione qualunque
$x^A + x^B = x^{TOT}$
$y^A + y^B = y^{TOT}$

Preferenze:

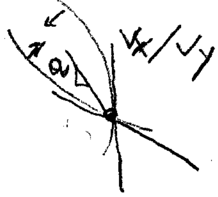




- Def Allocazione $((x^A, y^A), (x^B, y^B))$ PARETO OTTIMA se $\nexists$ allocaz. $((w^A, z^A), (w^B, z^B))$ t.c.
$u(w^A, z^A) > u(x^A, y^A)$ & $v(w^B, z^B) > v(x^B, y^B)$.

- OSS 1 Allocazioni (INTERNE...) dove $\frac{u_x}{u_y} \neq \frac{v_x}{v_y}$ non sono PO

Dim es. $\frac{v_x}{v_y} > \frac{u_x}{u_y}$



. Prendi $a > 0$ t.c. $\frac{u_x}{u_y} < a < \frac{v_x}{v_y}$.

Considera spostamento
$\Delta y^A = -a \Delta x^A$
$(\Delta x^B = -\Delta x^A,\ \Delta y^B = -\Delta y^A)$. Poiché per $i = A, B$
$|(\Delta x^i, \Delta y^i)| \xrightarrow[\Delta x^A \to 0]{} 0$, abbiamo $\Delta u \cdot du > 0$
& $\Delta v \cdot dv > 0$ per Δx^A sufficientemente piccolo. Ma

$$du = u_x \Delta x^A + u_y \Delta y^A = \Delta x^A (\overbrace{u_x - a u_y}^{<0}) > 0 \Leftrightarrow \Delta x^A < 0$$

$$\text{e } dv = v_x \Delta x^B + v_y \Delta y^B = \Delta x^B (\underbrace{v_x - a v_y}_{>0}) > 0 \Leftrightarrow \Delta x^B > 0$$

$\therefore$ Per $\Delta x^A < 0$ piccolo, $\Delta u > 0$ e $\Delta v > 0$. $\square$

- OSS 2 Alloc. interne dove $\frac{u_x}{u_y} = \frac{v_x}{v_y}$ sono PO se pref. di A, B sono convesse.

Dim

le allocazioni preferite da A (all'alloc. data) sono disgiunte da quelle preferite da B perché curve di indiff CONVESSE stanno da parti opposte della tangente comune r. $\square$

- Def Allocaz $((x_e^A, y_e^A), (x_e^B, y_e^B)) = \omega_e$ è equilibrio concorrenziale se $\exists\, p = (p_x, p_y)$ t.c.

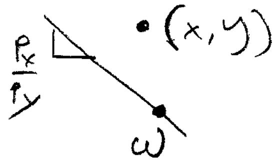
(x_e^A, y_e^A) risolve

$$\max \; u(x,y)$$
$$\text{s.a} \quad p_x x + p_y y \leq p_x x_0^A + p_y y_0^A$$

e (x_e^B, y_e^B) risolve l'analogo probl. per v.

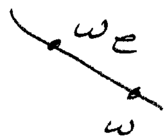
- PROP Qualunque eq. concorr. è PO.

Dim Per costruzione se $u(x,y) > u(x_e^A, y_e^A)$ deve essere $p_x x + p_y y > p_x x_0^A + p_y y_0^A$

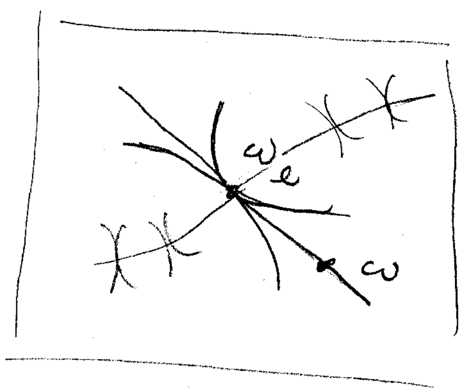


Analogamente se $v(x,y) > v(x_e^B, y_e^B)$ deve essere $p_x x + p_y y > p_x x_0^B + p_y y_0^B$.

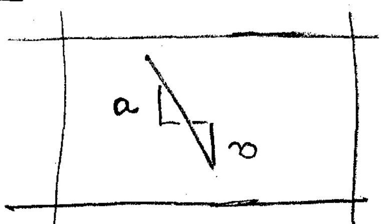
Sicché per essere un miglioramento rispetto all'equil. per A e B, (x,y) dovrebbe essere contemporaneamente 'sopra' e 'sotto' la retta



, assurdo. $\square$



NOTA una retta ha



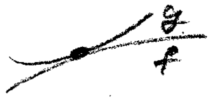
la stessa pendenza vista da A e da B in Edgeworth Box!

GEOMETRIA DELLA TANGENZA

8.III.07
S. MODICA

Def. Siano $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue. f e g sono tangenti in x^0 se

$$\lim_{x\to x^0}\frac{|f(x)-g(x)|}{|x-x^0|}=0.$$



⌈ cioè $\forall\varepsilon\,\exists\delta$ t.c. $\forall\, |x-x^0|<\delta$ $\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{|x-x^0|}\right|<\varepsilon$.
Qui $|x|=[\Sigma_i\, x_i]^{1/2}$. f continua in x^0 se $\lim_{x\to x^0} f(x)=f(x^0)$ ⌋

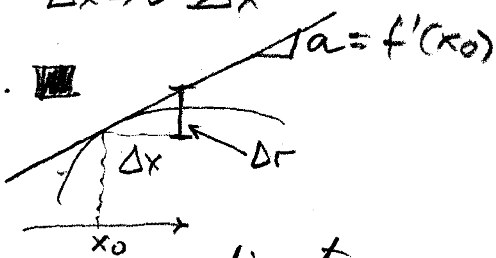
Oss la def sopra implica $f(x^0)=g(x^0)$, dunque $f(x)-g(x)=\Delta f-\Delta g$ con $\Delta f=fx-fx^0$, Δg analogo. Sicché

Def equiv. $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue con $f(x^0)=g(x^0)$ sono tangenti in x^0 se

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta f-\Delta g|}{|\Delta x|}=0,\qquad \Delta x\equiv x-x^0. \qquad (1)$$

$\boxed{\text{Teor}}$ Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. La retta $r(x)=f(x_0)+a(x-x_0)$ è tangente ad f in x_0 se e solo se $\exists \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x}=a$.

Dim r tang ad f in x_0 vuol dire, dato che $\Delta r=a\Delta x$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{\Delta f}{\Delta x}-a\right|=0$. ■

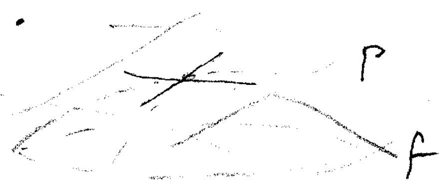


⌈ Ricorda che per $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, con $e^i=(0,\dots 1,0\dots)$, 1 all'i-esima coordinata,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)\equiv\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x^0+e^i\Delta x_i)-f(x^0)}{\Delta x_i}$$ ⌋

Teor Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continua con le sue derivate parziali. Il piano $p(x)=f(x^0)+\Sigma_i\, a_i\,(x_i-x_i^0)$ è tangente ad f in x^0 se e solo se $\partial f(x^0)/\partial x_i=a_i$.

NO DIM (Analisi II)



Dunque, con $f_i=\partial f/\partial x_i$, piano tangente ad f in x^0 è, con $\Delta x=x-x^0$,

$$p(x)=f(x^0)+\Sigma_i\, f_i(x^0)\Delta x_i$$

Def $df(x^0,\Delta x)\equiv\Delta p=\Sigma_i\, f_i(x^0)\Delta x_i$

↑ differenziale ↑ incr. sul piano tangente ⌈ come in $\mathbb{R}$! ⌋

Def Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. la tangente alle curva di livello $f(x) = f(x^0)$ è la curva di livello del piano tangente ad f in x^0.

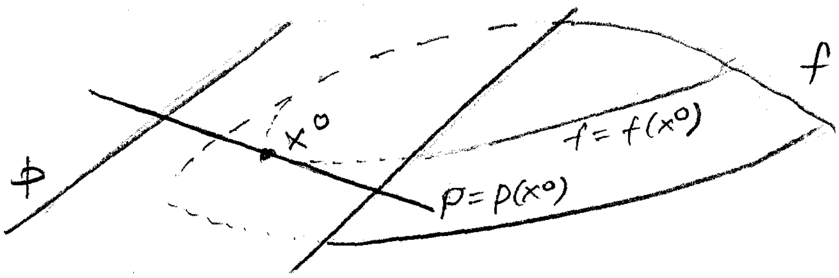


fig 1

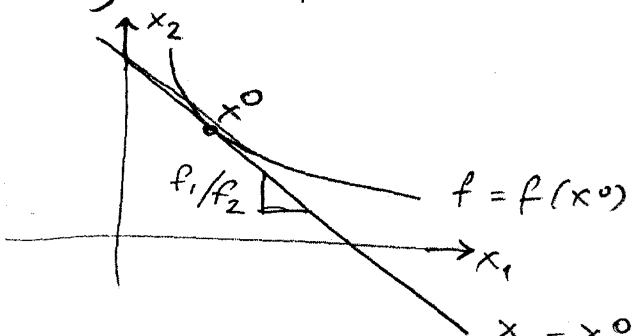
Dunque, con $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, è la retta $\Delta p = 0$, cioè

$$f_1(x^0)\Delta x_1 + f_2(x^0)\Delta x_2 = 0,$$

di pendenza

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = - \frac{f_1(x^0)}{f_2(x^0)} .$$

Proiezione fig. 1 sul piano $\mathbb{R}^2$:



$$x_2 = x_2^0 - \frac{f_1}{f_2}(x^0)\cdot(x_1 - x_1^0)$$

NOTA Applicando la def (1), il piano tangente ad f in x^0 è caratterizzato da:

$$\Delta f = \Sigma_i f_i(x^0)\Delta x_i + o(|\Delta x|) = df + o(|\Delta x|) \qquad (2)$$

$\boxed{\text{Teor}}$ Derivazione funzioni composte. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $i = 1, 2, \dots n$ ed $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Se f è continua con le sue der. parz. e x_i sono derivabili, allora – con $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ –

$$\frac{dF(t_0)}{dt} = \Sigma_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t_0)) \cdot \frac{dx_i(t_0)}{dt}$$

Dim Nota che $\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x_i = 0 \therefore \lim_{\Delta t \to 0} |\Delta x| = 0$. Abbiamo

$$\Delta F = \Sigma_i f_i \Delta x_i + o(|\Delta x|) = \Sigma_i f_i x_i' \Delta t + o(|\Delta x|) + o(|\Delta t|)$$

$$\therefore \frac{\Delta F}{\Delta t} = \Sigma_i f_i x_i' + \frac{o(|\Delta x|)}{|\Delta x|}\sqrt{\Sigma_i \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2} + \frac{o(|\Delta t|)}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \Sigma_i f_i x_i' . \quad \blacksquare$$

MAX UTILITÀ, MIN COSTO

S MODICA
16 MARZO 2007

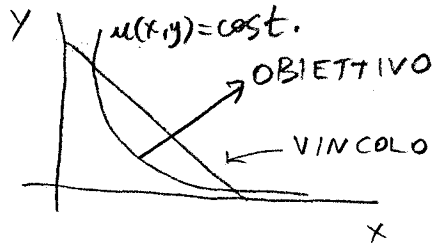
MAX UTILITÀ

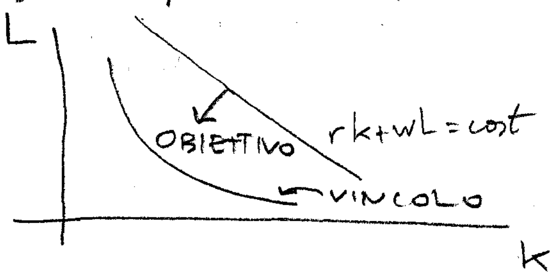
(P_U) $\max \ u(x,y)$
s.a. $p_x x + p_y y = m$

CON CURVE LIVELLO UTILITÀ & F. PROD. CONVESSE

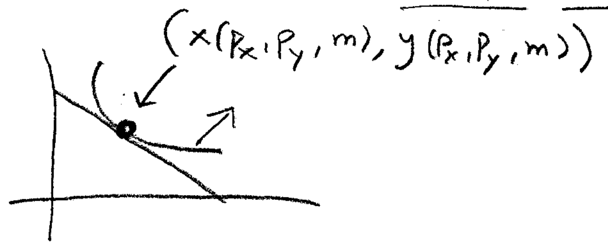
MIN COSTO

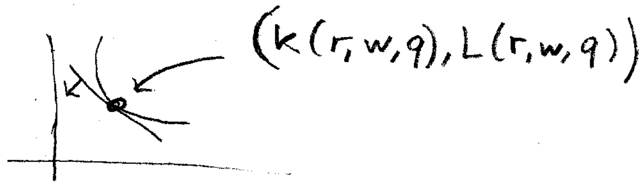
$\min \ rk + wL$
s.a. $f(k,L) = q$ (P_C)





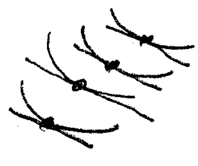
OTTIMO INTERNO



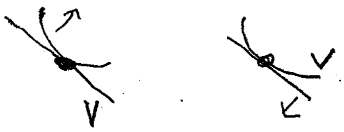


SOLUZIONE, DUE PASSI

T: CURVA E RETTA DEVONO ESSERE TANGENTI
- PROPR. SODDISFATTA DA INFINITI PUNTI



V: FRA GLI INFINITI PUNTI DI (T), PRENDI QUELLO SUL VINCOLO



CASO COBB-DOUGLAS

• UTILITÀ in (P_U), $u(x,y) = x^\alpha y^\beta$.

T: pend. curva indiff $= -u_x/u_y$; pend. vincolo $= -p_x/p_y$

$\therefore \ \frac{p_x}{p_y} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{y}{x} \quad \therefore \ p_y y = \frac{\beta}{\alpha} p_x x$

V: $m = (1+\frac{\beta}{\alpha}) p_x x \ \therefore \ p_x x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} m \ \therefore \ p_y y = \frac{\beta}{\alpha+\beta} m$

CONCL. $x(p_x,p_y,m) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_x}$, $y(p_x,p_y,m) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{m}{p_y}$.

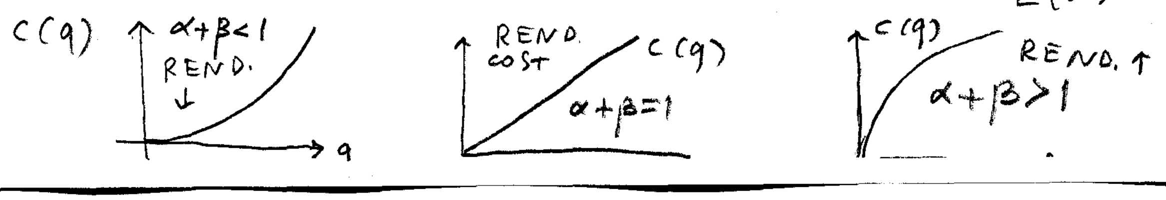
• COSTO in (P_C), $f(k,L) = A k^\alpha L^\beta$

T: $\frac{r}{w} = \frac{\alpha L}{\beta k} \ \therefore \ k = \frac{\alpha w}{\beta r} L$

V: $q = A\left(\frac{\alpha w}{\beta r}L\right)^\alpha L^\beta$

$\therefore \ \ldots \ L(q;r,w) = \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta r}{\alpha w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$; $k(q,r,w) = \left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha w}{\beta r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$

$\therefore \ c(q;r,w) = r\,k(\cdot) + w\,L(\cdot) = \ldots = \left[A^{-1} r^\alpha w^\beta\right]^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right] q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$



END 16 III

COSTI

• Sappiamo, con $x=(x_1,\dots,x_n)$ ed $f(x)$ f. di prod., la

Def. $c(q) = \min_x \{\sum_i w_i x_i : f(x)=q\}$. (1)

Chiamiamo $x(q)$ la soluzione del probl. di min (combinazione ottima dei fattori). Qui w è fisso, lo omettiamo da $c(q,w)$.

Def. Costo marginale: $c'(q) \equiv MC(q)$
costo medio: $c(q)/q = AC(q)$.

• Relazione fra AC e rendimenti di scala di f. [1]

PROP f ha rend. di scala $\begin{matrix}\text{decresc}\\ \text{cost}\\ \text{cresc}\end{matrix} \Rightarrow AC$ è $\begin{matrix}\text{crescente}\\ \text{costante}\\ \text{decresc}\end{matrix}$.

Dim. Se f ha rend. costanti $x(q) = q\,x(1)$, perchè: supponi $\exists x \neq q\,x(1)$ t.c. $fx = q$ & $\sum w_i x_i < \sum w_i q\, x_i(1)$; allora $q^{-1}x$ è t.c. $f(q^{-1}x)=1$ e $\sum w_i q^{-1} x_i < \sum w_i x_i(1)$, contraddizione. Quindi $c(q) \equiv \sum w_i x_i(q) = q\sum w_i x_i(1) = q\,c(1)$ ∴ $c(q)/q = c(1)\ \forall q$, cioè $AC = \text{cost}$.

Rend. decrescenti: basta dim che $\forall q, \forall t>1$ $c(tq) > t\,c(q)$ (perchè $q_1<q_2 \Leftrightarrow q_2 = tq_1$, con $t = q_2/q_1 > 1$). Per ciò a sua volta basta dim che: $\forall x$ t.c. $f(x)=tq$, $\sum w_i x_i > t\,c(q)$. Ma: se $f(x)=tq$ è $f(\frac1t x) > q$ [se fosse $f(\frac1t x) = q-\varepsilon$ con $\varepsilon \geq 0$ sarebbe $f(x) = f(t\frac1t x) < t f(\frac1t x) = tq - t\varepsilon \leq tq$]
∴ $\sum w_i \frac1t x_i > c(q)$. Caso rend. cresc. analogo. □

• Costi Medi ad U.

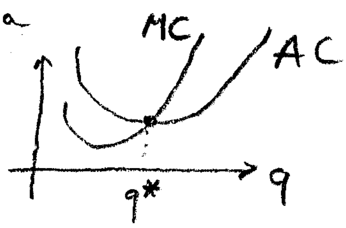
Si assume di solito che i rendim. di scala siano crescenti per q piccolo, poi decrescenti. Questo (o l'esistenza di costi fissi, vedi più sotto) produce costi medi a forma di U. Per esempio, ciò accade (verifica) con

$$c(q) = \begin{cases}\sqrt q & 0\le q\le 1/4\\ \frac14 + (q+\frac14)^2 & q \geq 1/4\end{cases}$$

In tal caso abbiamo la seguente

PROP Sia q^* il punto in cui AC ha min. Allora

$$AC\ \begin{matrix}\text{decr}\\ \text{cresc}\end{matrix} \Leftrightarrow q \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} q^* \Leftrightarrow MC \begin{matrix}<\\=\\>\end{matrix} AC.$$



Dim. La prima (dove l'= non conta) è ovvia. La 2ª:

$$q=q^* \Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dq}\frac{c(q)}{q} = \frac1q\left(c'(q) - \frac{c(q)}{q}\right) \Leftrightarrow MC(q) = AC(q).$$ Poi,

$$AC(q^*) = \min AC \Leftrightarrow \frac{d^2}{dq^2}AC = \frac1q\left[\frac2q\left(c'(q) - \frac{c(q)}{q}\right) + c''(q)\right] > 0 \text{ a } q^*$$

$$\Leftrightarrow c''(q^*) > 0.\ \square$$

NOTA CHE $MC \begin{matrix}<\\>\end{matrix} AC \Leftrightarrow AC\ \begin{matrix}\text{Decr}\\ \text{Cres.}\end{matrix}$ è intuitivo!

---

[1] Ricorda che f ha rendim. di scala $\begin{matrix}\text{cresc}\\ \text{cost.}\end{matrix}$ se $\forall t>1$ $f(tx) \begin{matrix}>\\=\end{matrix} t\,f(x)$. Per inciso, assumiamo sempre $\partial f/\partial x_i > 0\ \forall x\ \forall i$

• Costi di Breve Periodo (Short Run)

Nel breve periodo alcuni fattori sono 'fissi' - pensa $x=(K,L)$ con K fisso nel breve periodo. Sia $x=(x_f, x_v)$ con x_f fattori fissi ed x_v variabili (es. $x_f=(x_1,x_2)$, $x_v=(x_3,\dots x_n)$). L'impresa minimizza solo rispetto ad x_v nel breve, e il costo min per produrre q dipende da x_f:

<u>Def</u> $c_{SR}(q; x_f) = \min_{x_v} \{\sum_i w_i x_i : f(x)=q\}$. (2)

La <u>soluzione</u> di questo probl. la chiamiamo $x_v(q, x_f)$.

• <u>PROP</u> $\forall q \ \forall x_f \quad c_{SR}(q, x_f) \geq c(q)$. (3)

Inoltre, con $x(q) = (x_f(q), x_v(q))$ sol. di (1), abbiamo

$$\forall q \quad c_{SR}(q, x_f(q)) = c(q). \qquad (4)$$

<u>Dim</u> La (3) segue direttamente da (1) e (2). La (4): se $x_f = x_f(q)$, con $x_v = x_v(q)$ si ha $f(x_f, x_v)=q$ e $\sum w_i x_i = c(q)$, sicché $x_v(q)$ risolve (2) (perché dalla (3) non puoi far meglio) e vale (4). □

<u>Nota che</u> in pratica la dim dice: $x_v(q, x_f(q)) = x_v(q)$, che è ovvio!

• OSSERVA, da (2), che

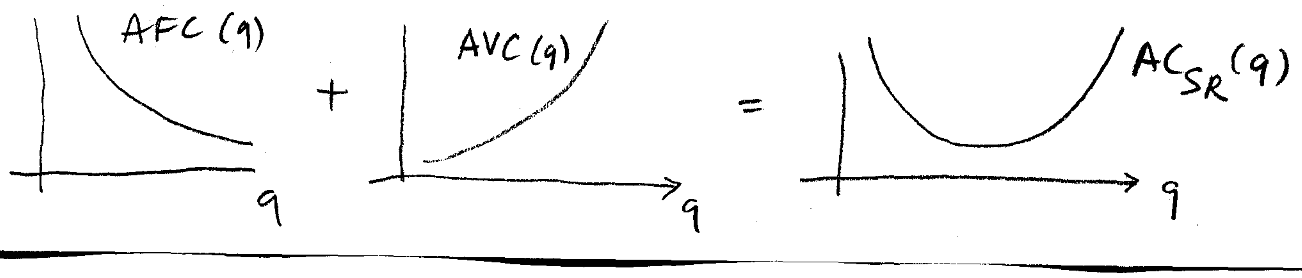
$$c_{SR}(q, x_f) = \sum_{i \in f} w_i x_i + \min_{x_v} \{\sum_{i \in v} w_i x_i : f(x_f, x_v) = q\}$$

$$\equiv FC(x_f) + VC(q, x_f)$$

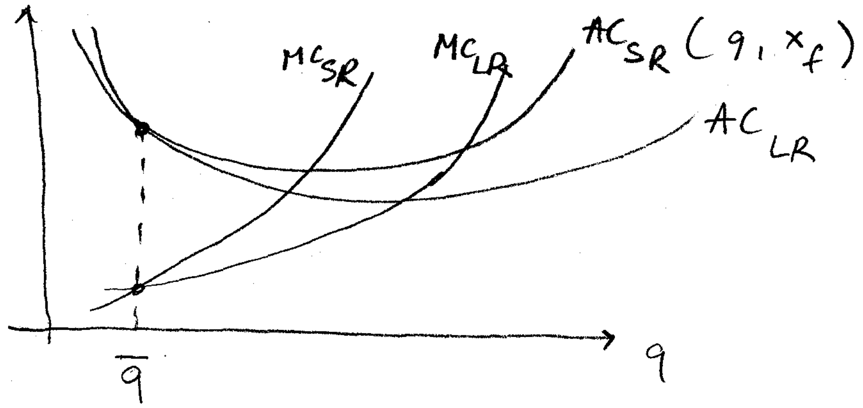
con FC = Fixed Cost (indip da q) e VC = Variable Cost. In termini di costi Medi (usiamo A = average) abbiamo dunque

$$AC_{SR}(q) = \frac{FC}{q} + \frac{VC(q)}{q} = AFC(q) + AVC(q).$$

Anche se i rendim. di scala sono decrescenti nel breve periodo - AVC crescenti - la forma iperbolica di AFC fa sì che di solito AC_{SR} hanno la caratteristica forma ad U come in figura (<u>studia</u> il facile esempio $c_{SR}(q) = 1 + q^2$):



- In termini di costi medi e marginali, la relazione fra breve periodo (SR) e lungo periodo (LR = long Run) è la seguente. Usiamo la notazione $c(q) = c_{LR}(q)$, $AC = AC_{LR}$ ecc. per evidenziare la diff. con c_{SR}, AC_{SR}, $MC_{SR} = c'_{SR}$.



Qui $x_f = x_f(\bar{q})$ (sol di (1)), $AC_{SR}(\bar{q}, x_f) = AC_{LR}(\bar{q})$ da (4). La tangenza fra AC_{SR} ed AC_{LR} a $\bar{q}$ viene da (4) e (3) (perché $(d/dq)^{\pm} AC_{SR} \gtrless (d/dq)^{\pm} AC_{LR} \therefore \frac{d\, AC_{SR}}{dq} = \frac{d\, AC_{LR}}{dq}$).
E da questo segue $MC_{SR}(\bar{q}) = MC_{LR}(\bar{q})$, perché a $q = \bar{q}$ abbiamo

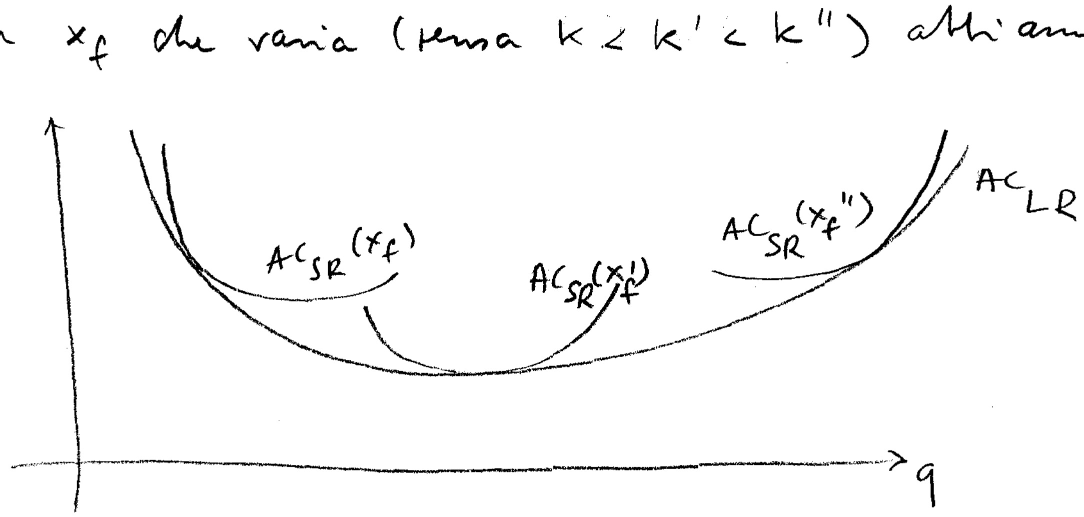
$$\frac{d}{dq} AC_{LR} = \frac{1}{q}\left(MC_{LR} - AC_{LR}\right) = \frac{1}{q}\left(MC_{LR} - AC_{SR}\right)$$

ma anche

$$\frac{d}{dq} AC_{LR} = \frac{d}{dq} AC_{SR} = \frac{1}{q}\left(MC_{SR} - AC_{SR}\right);$$

dall'uguaglianza degli ultimi membri segue $MC_{LR} = MC_{SR}$.

- Per x_f che varia (pensa $k < k' < k''$) abbiamo



Ogni punto di AC_{LR} è tangente ad una AC_{SR} (a dato q, alla $AC_{SR}(x_f)$ con $x_f = x_f(q)$).