Sia $P(n,i)$ il problema con n pall. in i pesate; sia $n(i) = \max\{n : P(n,i) \text{ ha soluz.}\}$.

<u>PROPOSIZIONE</u>. $n(3)=11$

<u>Notazione</u> su modifiche di P : P_e se si hanno a disposizione palline 'test' di peso 'regolare'; $P_{e,d}$ se si sa inoltre che la pallina diversa è più pesante o che è più leggera.

<u>Osservazione</u>. In ogni pesata, nei due piatti numero uguale di pall.
<u>Dim</u>. Altrimenti, se il piatto con più palline è più pesante, dalla pesata non si può estrarre nessuna informazione.

(1) $P_e(3,1)$ non ha soluzione.
<u>Dim</u>. Verifica che nessuna pesata possibile garantisce la soluzione. □

(2) $P_e(6,2)$ non ha soluzione.
<u>Dim</u>. (i) usando pall. test: pesando 1,2, o 3 contro test, se $=$ resti con $P_e(5,1)$, $P_e(4,1)$ o $P_e(3,1)$, senza sol. da (1); pesando 4, 5, o 6, se $\neq$ resti con $P_{e,d}(4,1)$ o peggio, senza soluz. (ii) Senza pall.-test: 1 per piatto, se $=$ sei in $P_e(4,1)$; 3 per piatto non dà informazione; 2 per piatto: supponi $12 / 34$. Se le ripesi ridistribuendole, tipo $13, 24$, non risolvi se $13 / 24$. Se ne metti una per piatto o usi palline test, si verifica facilmente che restano sempre casi 'scoperti'. □

(3) In $P(n,3)$, alla 1ª pesata devi mettere 3 palline per piatto, $\forall n \geq 12$.
<u>Dim</u>. Se metti 4 per piatto e $\neq$, supponi $1234 / 5678$: puoi ripesarle ridistribuite, ma sia scambiandone 1, che 2 o 3 è facile verificare che

c'è un risultato che rende impossibile risolvere il probl. nella restante ultima pesata; e pesandone (alla 2ª pesata) una parte, con o senza palline test, si vede analogamente che si resta con problemi tipo $P_{e,d}(4,1)$ o peggiori, senza soluzione (le possibilità sono: alcune di un piatto contro pall. test; quelle di un piatto distribuite sui due piatti; alcune da ogni piatto sui due piatti). Ovviamente la situazione peggiora se a 1ª pesata se ne mettono 5 o più su ogni piatto. Dunque o 3 per piatto o meno di tre; ma meno di tre è dominato da 3: è lo stesso se $\neq$ (ri)solvi comunque), peggio se = (te ne restano di più in mano). □

<u>Dim della Prop.</u> Da dim che $P(12,3)$ non ha soluzione. Da (3), alla 1ª pesata 3 pall. per piatto. Ma se = sei in $P_e(6,2)$, senza sol. da (2). □

<u>ESERCIZI</u> sulla struttura di $P(n,i)$

$\boxed{1}$. Dim che: In una strategia che risolve $P(n(i),i)$, una pallina non viene mai pesata (sugg. Per contraddizione)

$\boxed{2}$ Indica con $\tilde{P}$ il problema in cui le pall. potrebbero anche essere tutte uguali; $\tilde{n}(i)$ definito nel modo ovvio. Dimostra che $n(i) = \tilde{n}(i) + 1$.
(sugg. dim. che $\exists$ sol di $P(n,i) \Leftrightarrow \exists$ sol di $\tilde{P}(n-1,i)$, usando l'es. 1 per $\Rightarrow$)

Soluz. es 1. Supponi il contrario, cioè che esista una strategia che risolve $P(n(i), i)$ pesando tutte le palline, e considera $P(n(i)+1, i)$. Applica la data strategia alle prime $n(i)$ palline; se trovi quella diversa, hai finito; se non la trovi vuol dire che non c'è fra le prime $n(i)$! allora sarà diversa la $(n(i)+1)$-esima. In questo modo risolvi $P(n(i)+1, i)$, contraddizione. $\square$

Soluz. es. 2 $\Leftarrow$ facile; $\Rightarrow$: applica alle $n-1$ palline date la strategia che risolve $P(n, i)$ (dall'es 1 questa pesa solo $n-1$ palline); se la diversa è fra loro l'hai trovata; se non lo è, le $n-1$ pall. sono tutte uguali. Così hai risolto $\tilde{P}(n-1, i)$. $\square$