Prezzi Relativi I: Scambi e Prezzi

Salvatore Modica

21 maggio 2011

Intro

Che cos'è una economia? Vista tipo da una nuvoletta, è una moltitudine di individui che scambiano beni nel perseguimento dei propri interessi, di utilità dal consumo o di profitto dalla produzione. Se poi acceleriamo il film e guardiamo agli anni o ai decenni allora vediamo altre cose, le crisi, le accelerazioni, e la crescita di lungo periodo. Qui guardiamo senza acceleratore, agli scambi di beni.

I prezzi relativi sono i termini ai quali si scambiano i beni. Se 1 pera si scambia con 3 mele vuol dire che il prezzo delle pere in termini di mele è 3. Ma anche i tassi di interesse, nominali e reali, sono prezzi relativi, e così anche i tassi di cambio. Poiché il concetto di prezzo relativo è utile e importante, introdurremo una relazione di *scambiabilità* che useremo per chiarirlo e applicarlo a vari argomenti, dai deflatori del PIL e indici dei prezzi al consumo alla relazione fra prezzo dei BOT e tasso di interesse, alla "attualizzazione" di flussi finanziari futuri, alla *Purchasing Power Parity* (PPP) usata nei confronti internazionali. Non ti lasciare impressionare dal look un pò matematico, perché non faremo niente di difficile. E' solo che le definizioni precise alla fine aiutano.

Questo è un capitolo di "micro-macro" che, secondo me stranamente, nei libri non si trova. L'ho scritto perché credo che siano cose che è bene avere subito chiare. Magari non si approfondisce tutto subito, ma poi si ritrova quando serve. Per comodità lo dividiamo in due parti, una più Micro, la seconda Macro.

1 La Relazione di Scambiabilità

Per abbreviare frasi tipo "2 pere si scambiano con 4 mele" useremo la seguente notazione, con i, j, k nomi di beni ed $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ quantità:

$$\alpha \,\big|\, i \quad \text{“}\alpha \text{ unità di } i\,\text{”} \qquad \simeq \quad \text{“Scambiabile con”}$$

Per esempio se 3 pere si scambiano con 6 mele scriveremo $3\,\big|\,pera \;\simeq\; 6\,\big|\,mela$. In generale scriveremo

$$\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \text{ per dire "}\alpha\text{ unità di }i\text{ sono scambiabili con }\beta\text{ unità di }j\text{".}$$

La relazione di scambiabilità, per essere interpretata come tale, deve essere una relazione di equivalenza: Riflessiva, nel senso che $\alpha \,|\, i \simeq \alpha \,|\, i$; Simmetrica, cioè $\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \implies \beta \,|\, j \simeq \alpha \,|\, i$; e Transitiva, $\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \;\&\; \beta \,|\, j \simeq \gamma \,|\, k \implies \alpha \,|\, i \simeq \gamma \,|\, k$. Inoltre, nella realtà se $3 \,|\, pera \simeq 4 \,|\, mela$ allora $6 \,|\, pera \simeq 8 \,|\, mela$ e così via, quindi assumeremo che $\simeq$ soddisfa anche la seguente *proprietà di Linearità:*

$$\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \implies \forall t > 0 \; t\alpha \,|\, i \simeq t\beta \,|\, j. \tag{\textbf{L}}$$

In effetti la linearità presuppone volumi di scambio non talmente rilevanti da alterarne i termini. In altre parole, è plausibile che se $3 \,|\, pera \simeq 4 \,|\, mela$ allora $6 \,|\, pera \simeq 8 \,|\, mela$, ma se volessi tutte le pere del mondo questo rapporto probabilmente non varrebbe più. [1]

2 I Prezzi dei Beni

I prezzi relativi descrivono i rapporti di scambio fra i singoli beni: se $1 | pera$ si scambia con $4 | mela$ il prezzo delle pere in termini di mele è 4. Se p_{pera} e p_{mela} sono i rispettivi prezzi deve essere $p_{pera} = 4p_{mela}$, cioè $p_{pera}/p_{mela} = 4$. Dunque, una pera si scambia con p_{pera}/p_{mela} unità di mele. Cioè , p_{pera}/p_{mela} è il prezzo delle pere *in termini di* mele. In questo senso i prezzi descrivono rapporti di scambio (più in là dirai *equilibrano il mercato*). Sono *relativi* perché quando si scambiano due beni il prezzo è sempre il prezzo di un bene *in termini* dell'altro.

Considera adesso un'economia con n beni. Chiamiamo i beni $1, 2, \ldots, n$ (sarà magari mele il bene 1 eccetera), così per es. x_3 indicherà una quantità del bene 3, eccetera. Il sistema dei prezzi dell'economia sarà un vettore $(p_1 \ldots p_n)$ di numeri non negativi, con p_i prezzo del bene i, che riflettono i termini ai quali avvengono gli scambi. E questi termini riflettono il *valore* dei vari beni. Quindi diamo la definizione direttamente in termini di valore, dicendo che uno scambio avviene se le quantità scambiate hanno lo stesso valore. Formalmente la definizione è questa:

Definizione. Il vettore $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+$ è il sistema di prezzi dell'economia descritta dalla relazione di scambiabilità $\simeq$ se

$$\forall x_i, x_j \quad x_i \,|\, i \simeq x_j \,|\, j \quad \iff \quad p_i x_i = p_j x_j\,. \tag{\textbf{P}}$$

Cioè, due quantità di beni sono scambiabili se hanno lo stesso valore (prezzo per quantità). Ma abbiamo detto poco fa che p è definito in modo che "una pera si scambia con p_{pera}/p_{mela} unità di

[1](Per chi ha studiato le relazioni) La $\simeq$ non è altro che una relazione di equivalenza su $\mathbb{R}_+ \times \{1, \ldots n\}$ con una proprietà di linearità su $\mathbb{R}_+$. Abbiamo solo pòsto $\alpha \,|\, i \equiv (\alpha, i)$.

mele", dunque in generale che $1 \,|\, i \simeq p_i/p_j \,|\, j$. Stiamo dicendo la stessa cosa? Si. La proprietà **P** dice la stessa cosa, ma evitando una possibile divisione per zero. In effetti, *nel caso in cui* $p_j > 0$, $p_i x_i = p_j x_j \iff x_j = (p_i/p_j)x_i$ dunque la **P** è equivalente a $x_i \,|\, i \simeq (p_i/p_j)x_i \,|\, j$, che usando la linearità **L** a sua volta equivale a dire che

$$1 \,|\, i \simeq \frac{p_i}{p_j} \,|\, j\,,$$

cioè, come sappiamo, che p_i/p_j *è il prezzo di* i *in termini di* j.

Questo, morale della favola, è p_i/p_j: *una unità di* i *si scambia con* p_i/p_j *unità di* j.

Osservazione. E' importante notare che **P** implica che se p descrive i rapporti di scambio di un'economia, altrettanto lo fa $tp = (tp_1, \ldots, tp_n)$ per qualunque $t > 0$. Solo i rapporti sono rilevanti. Per esempio si può prendereil vettore $q = p/p_1$ se $p_1 \neq 0$, e nel nuovo vettore il primo bene ha prezzo 1 (si chiama allora 'numerario'), e tutti i prezzi sono in termini del bene 1: $q_1 = 1$ e $q_i = q_i/q_1$. Il numerario che noi usiamo comunemente è l'Euro.

2.1 Esempio: Tasso di Interesse Nominale

Una mela subito è cosa diversa da una mela fra un anno. Ci aspettiamo che valga di più ora, in altre parole indicizzando i beni con la data in cui sono disponibili ci aspettiamo che $1 \,|\, \text{mela}_t \simeq \alpha \,|\, \text{mela}_{t+1}$ con $\alpha > 1$. Analogamente per €^{t} ed €$^{t+1}$ nel mercato della valuta a termine (dovesi scambiano valute disponibili a diverse date). Il *tasso di interesse nominale* i_t (al tempo t, in un paese con l'Euro) è definito dalla relazione

$$1 \,|\, €^t \simeq (1 + i_t) \,|\, €^{t+1}\,. \tag{1}$$

Se $i_t = .05 = 5\%$, un euro oggi vale 1.05 euro domani: $1 + i_t$ è il prezzo di €^{t} in termini di €$^{t+1}$. Nota che per linearità il prezzo di €$^{t+1}$ in termini di €^{t} è $1/(1 + i_t)$.

2.2 Esempio: la Relazione fra Prezzo di un Titolo e Tasso di interesse

Il titolo di cui parliamo è tipo un BOT, cioè un pezzo di carta emesso al tempo t in cui c'è scritto: "*A* $t + 1$ *ti darò 1 Euro*". Quanto vale? Se P_t^B è il suo prezzo, stiamo dicendo che

$$P_t^B \,|\, €_t \simeq 1 \,|\, €^{t+1},$$

che per linearità è equivalente a $1 \,|\, €^t \simeq 1/P_t^B \,|\, €^{t+1}$, cioè $1/P_t^B$ è il prezzo di $€^t$ in termini di $€^{t+1}$; ma sappiamo che questo è $1+i_t$. Conclusione,

$$P_t^B = \frac{1}{1+i_t}.$$

Un modo alternativo di arrivare a questo risultato è di osservare che comprando il titolo al prezzo P_t^B, il rendimento i_tè dato da $i_t = (1-P_t^B)/P_t^B$, da cui risolvendo si ottiene la stessa relazione. Quindi, registra: P_t^B basso vuol dire i_t alto.

2.3 Esempio: Tasso di Cambio Nominale

Analogamente, nel mercato valutario si scambiano le valute di paesi diversi. Per esempio oggi $1 \,|\, €$ si scambia con $1.3 \,|\, \$$, cioè il cambio dollari per euro —\$/€— è 1.3. In generale per paesi I, J con valute $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ il tasso di cambio $\mathcal{J}$ per $\mathcal{I}$, $E^{\mathcal{J}/\mathcal{I}}$, è definito dalla relazione

$$1 \,|\, \mathcal{I} \simeq E^{\mathcal{J}/\mathcal{I}} \,|\, \mathcal{J}\,.$$

Il soprascritto è brutto ma ci ricorda che è un rapporto di unità di $\mathcal{J}$ per unità di $\mathcal{I}$.

3 Il Valore dei Panieri di Beni

Con $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ indichiamo il *paniere* di beni contenente x_1 unità del bene 1 ($x_1 |1$ nella notazione di sopra), x_2 del bene 2 eccetera. Vogliamo dire, generalizzando la **P,** che due panieri di beni sono scambiabili se hanno lo stesso valore, dove il valore di un paniere è naturalmente dato dalla somma dei prodotti prezzo per quantità dei beni che il paniere contiene. Questo è ciò che dice la Proposizione di sotto. Se vuoi puoi saltare le formalità e registrare solo il conenuto della Proposizione.

Due panieri $x, y \in \mathbb{R}_+^n$ sono scambiabili se sono entrambi scambiabili per la stessa quantità di un bene dato. Formalmente:

Definizione. Due panieri x ed y sono scambiabili se esiste un bene j e vettori $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ tali che per $i = 1, \ldots, n$ $x_i \,|\, i \simeq \alpha_i \,|\, j$, $y_i \,|\, i \simeq \beta_i \,|\, j$ e $\sum_i \alpha_i = \sum_i \beta_i$.

La caratterizzazione di scambiabilità in termini di valore espressa da **P** generalizza al caso di panieri, dove valore è la somma dei valori delle quanntità dei beni componenti il paniere:

Proposizione. Due panieri x, y sono scambiabili se e solo se $\sum_i p_i x_i = \sum_i p_i y_i$.

Dimostrazione. [(te ne puoi fregare)] Se x ed y sono scambiabili da $x_i \,|\, i \simeq \alpha_i \,|\, j$ segue $p_i x_i = p_j \alpha_i$ e analogamente $p_i y_i = p_j \beta_i$, per tutti gli i; da ciò sommando otteniamo $\sum_i p_i x_i = p_j \sum_i \alpha_i = p_j \sum_i \beta_i = \sum_i p_i y_i$.

Sia viceversa $\sum_i p_i x_i = \sum_i p_i y_i$. Se il valore comune è zero allora $p_i x_i = p_i y_i = 0 = p_1 \cdot 0$ per ogni i, da cui ogni componente dei due panieri, e quindi entrambi i panieri, sono scambiabili con zero unità del bene 1. Se il valore comune è positivo, esistono h, j tali che $p_h x_h > 0$ e $p_j y_j > 0$. Inoltre, per ogni i

$$\begin{aligned} & x_i \,|\, i \simeq \frac{p_i}{p_h} x_i \,|\, h \simeq \frac{p_i}{p_h}\frac{p_h}{p_j} x_i | j\,, \\ & y_i \,|\, i \simeq \frac{p_i}{p_j} y_i \,|\, j\,, \text{ e} \\ & \sum\nolimits_i \frac{p_i}{p_j} x_i = \sum\nolimits_i \frac{p_i}{p_j} y_i\,; \end{aligned}$$

da ciò la conclusione segue applicando la definizione. □

4 Il Problema dei Beni Liberi (Optional).

L'acqua del mare è utile ma non ha valore di scambio: lavoreresti una giornata per un pò di acqua di mare? O, vista al contrario, se offri un pò di acqua di mare quante mele ti daranno in cambio? Intuitivamente questo tipo di beni, che chiameremo *liberi*, anzi *free*, all'inglese, devono avere prezzo zero. Lo scopo di questo paragrfo è dimostrare questo, che i beni free, e solo quelli, hanno prezzo zero. Nelle economie che abbiamo descritte sopra ci possono essere beni liberi e prezzi zero, solo che non ne abbiamo parlato per non complicare le cose, e lo facciamo qui.

Come definirli in termini della nostra relazione di scambiabilità in modo che nel sistema di prezzi che descrive gli scambi avranno prezzo zero? Per rispondere dobbiamo aggiungere un'assunzione, abbastanza innocua, sulla relazione di scambiabilità, che dice in pratica che la quantità nulla di un bene equivale a una quantità nulla di qualunque altro:

Assioma. [**Z**] Scambi per Zero. Se per i, j vale $\alpha \,|\, i \simeq 0 \,|\, j$, allora $\forall\, k\ \alpha \,|\, i \simeq 0 \,|\, k$.

La definizione che cerchiamo è questa: un bene è free se viene regalato:

Definizione. [**F/NF**] Il bene i è free se $\forall\, \alpha > 0, j\ \alpha \,|\, i \simeq 0 \,|\, j$. Altrimenti (se $\exists\, \alpha > 0, j$ tali che $\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \Rightarrow\ \beta > 0$) il bene è non-free.

Nota che da **Z** ed **L** segue che se i è non-free, per *ogni* $\alpha > 0$ e j vale $\alpha \,|\, i \simeq \beta \,|\, j \Rightarrow \beta > 0$; in particolare, se $\alpha \,|\, i \simeq 0 \,|\, i \Rightarrow \alpha = 0$. In termini di scambiabilità, dalla definizione derivano le seguenti proprietà:

Proposizione. (i) Se f, g sono due beni free, $\forall\, \alpha, \beta\ \alpha \,\big|\, i \simeq \beta \,\big|\, j$;

(ii) Se f è free ed i non-free, $\forall \alpha\ \alpha \,\big|\, f \simeq \beta \,\big|\, i \iff \beta = 0$;

(iii) Se i e j sono non-free, se $\alpha \,\big|\, i \simeq \beta \,\big|\, j$ allora $\alpha > 0 \iff \beta > 0$;

(iv) Se i è non-free, $\alpha \,\big|\, i \simeq \beta \,\big|\, i \Rightarrow \alpha = \beta$.

Come vediamo, un bene free "comanda" solo quantità nulle di beni non-free; vista al contrario, non c'è quantità di un bene free che comanda una quantità positiva di un bene non-free (il prezzo di quest'ultimo in termini dell'altro dovrebbe essere infinito); d'altra parte, una quantità positiva di un bene non-free comanda quantità positive di ogni altro bene.

Dimostrazione. Di nuovo, se sei qui queste le dovresti dimostrare come esercizio. Usiamo la definizione ed **Z**, più le proprietà di base di $\simeq$ (in particolare la transitività). (i) $\alpha \,\big|\, f \simeq 0 \,\big|\, g \simeq \beta \,\big|\, g$. (ii) Poiché $\alpha \,\big|\, f \simeq 0 \,\big|\, i$, sarà $\alpha \,\big|\, f \simeq \beta \,\big|\, i \iff 0 \,\big|\, i \simeq \beta \,\big|\, i \iff \beta = 0$. (iii) Se fosse $\alpha > 0$ e $\beta = 0$ seguirebbe $\alpha \,\big|\, i \simeq 0 \,\big|\, i$, contraddizione; simmetrico l'argomento per β. (iv) Uno scambio $\alpha + \alpha' \,\big|\, i \simeq \alpha \,\big|\, i$ equivale ad $\alpha' \,\big|\, i \simeq 0 \,\big|\, i$, da cui $\alpha' = 0$. □

A questo punto passiamo ai prezzi. Vogliamo adesso concludere che i prezzi dei beni free sono zero, mentre quelli dei non-free sono positivi. Siamo al punto di arrivo di questa discussione:

Proposizione. Se i è free $p_i = 0$; se è non-free, $p_i > 0$.

Dimostrazione. i è free $\iff \exists \alpha > 0 : \alpha \,\big|\, i \simeq 0 \,\big|\, i \iff \exists \alpha > 0 : p_i \alpha = p_i \cdot 0 \iff p_i = 0$. □