

Il Problema della Segretaria

Teoria delle Decisioni, Aprile 2001 (S Modica)

1 Il Problema

È un problema di optimal stopping, nel senso che ci sono osservazioni sequenziali e ad ogni stadio si decide se fermarsi o continuare; troncato ad n , perchè dopo l' n -esima osservazione ci si ferma in ogni caso. Specificamente, il problema è il seguente. Si deve scegliere un oggetto fra n — ‘una segretaria’, un collaboratore, un partner, un quadro, quello che vuoi. Gli oggetti, che arrivano in ordine ‘casuale’, vengono osservati a costo zero sequenzialmente uno alla volta, e all’osservazione r -esima, $r = 1, 2, \dots, n - 1$, dopo aver valutato le preferenze sugli oggetti osservati, si può: o accettare *l’oggetto appena osservato*, oppure scartarlo e passare all’osservazione $r + 1$ (nota che dunque non si può, dopo l’osservazione r , decidere per un oggetto precedentemente osservato e scartato — ogni lasciata è perduta); all’osservazione n -esima si deve necessariamente accettare. Il problema è di trovare una regola di arresto che massimizzi l’utilità attesa della scelta. Il trade-off è: se accetti troppo presto non vedi i migliori; ma se vai troppo avanti, magari i migliori li hai rifiutati e perduti per strada.

2 Formalizzazione

Fatta l’ r -esima osservazione il decisore valuta le sue preferenze sugli oggetti osservati, classificando l’ultimo osservato al posto $c = 1, 2, \dots, r$ ($c = 1$ se è il migliore, e così via). Data la posizione c dell’ultimo osservato, il resto della classifica parziale è irrilevante, perchè gli altri oggetti non possono più essere scelti. Dunque fatta l’ r -esima osservazione il decisore si trova in uno stato (nodo) che possiamo descrivere con la coppia (c, r) .

Se al nodo (c, r) il decisore non accetta, passa ad un nodo $(c', r + 1)$; che distribuzione di probabilità avrà $c' = 1, 2, \dots, r + 1$? Per rispondere a questa domanda dobbiamo individuare lo spazio di probabilità sottostante al problema; nella nostra situazione, il caso determina il modo in cui si dispone la graduatoria nelle n osservazioni. Per esempio supponiamo $n = 3$; una possibile realizzazione è allora $(2, 1, 3)$, che vuol dire: prima arriva il medio, poi il migliore, per ultimo il peggiore; e le altre possibilità sono le altre permutazioni dei numeri $1, 2, 3$, con interpretazioni analoghe. Tornando al caso generale, lo spazio rilevante è dunque l’insieme Π delle $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$; e su Π stiamo assumendo probabilità P uniforme: $P(\pi) = 1/n!$ per ogni $\pi \in \Pi$. Dato ciò segue che anche i nodi $(c', r + 1)$, $c' = 1, 2, \dots, r + 1$ hanno probabilità uniforme, cioè uguale ad $1/(r + 1)$ per tutti. Questo dovrebbe essere intuitivamente chiaro; per formalizzarlo ci vorrebbe un pò di notazione pesantuccia sulle permutazioni, che ci risparmiamo.

Passando all’utilità: nota che se il decisore accetta al passo $r < n$, poichè non osserva gli $n - r$ rimanenti, non saprà con certezza la posizione dell’oggetto scelto nella graduatoria di *tutti* gli n oggetti. Immagina per esempio la seguente situazione: $n = 10$; il decisore osserva il primo oggetto e lo scarta; osserva il secondo, lo valuta migliore del

primo e lo accetta; in questo caso, fra i due osservati quello scelto è primo, ma nell'insieme degli 10 oggetti esistenti potrebbe anche essere nono! (in termini dello spazio Π , stiamo considerando l'insieme delle permutazioni 'compatibili' con l'ordine parziale delle prime r osservazioni). D'altra parte a guidare la scelta deve essere la posizione (attesa) del candidato nella graduatoria complessiva. Formalmente, sia $i = 1, 2, \dots, n$ la posizione dell'oggetto scelto fra *tutti* gli n nelle preferenze del decisore; l'utilità di quest'ultimo dipenderà allora da i , e la indicheremo con $u(i)$. Ovviamente $u(1) \geq u(2) \geq \dots \geq u(n)$.

Per finire: il decisore deve scegliere una regola di arresto che massimizzi l'utilità attesa della scelta. Più precisamente: una regola di arresto t può essere descritta nel nostro caso come una funzione $(c, r) \mapsto t(c, r) \in \{\text{Accetto}, \text{Continuo}\}$. Una tale t , insieme alla P su Π , determina una distribuzione su i e quindi su $u(i)$. Rispetto a questa distribuzione si considera il valore atteso di $u(i)$. Chiaramente per risolvere un caso concreto dovremo specificare una precisa (e semplice!) u .

3 Induzione all'indietro

Intanto osserviamo che siamo di fronte ad un problema finito, quindi lo potremmo dare al calcolatore e farlo risolvere a lui. È comunque più divertente pensarci: possiamo applicare l'induzione all'indietro, che qui è di casa. Indichiamo con $u_s(c, r)$ l'utilità attesa di accettare al nodo (c, r) e con $v(c, r)$ il valore del nodo (in Piccinato sez. 1.8 è ρ). Allora la optimality equation è

$$v(c, r) = \max \left\{ u_s(c, r), (r+1)^{-1} \sum_{c'=1}^{r+1} v(c', r+1) \right\}, \quad \begin{array}{l} r = 1, 2, \dots, n-1, \\ c = 1, 2, \dots, r, \end{array}$$

$$v(c, n) = u_s(c, n) = u(c), \quad c = 1, 2, \dots, n.$$

Troveremo v in un caso specifico qui di sotto, ma intanto calcoliamo $u_s(c, r)$. Dobbiamo vedere che valori può assumere i dato (c, r) , e con che probabilità. Il range di i : l'oggetto si è classificato c -esimo fra gli r osservati; il meglio che gli può capitare è che gli $n-r$ non osservati gli restano tutti sotto, nel qual caso $i = c$; alla peggio gli stanno tutti sopra, e scende al posto $i = c + n - r$. Probabilità: (ricorda che P è uniforme) sul totale degli $\binom{n}{r}$ stati (=arrivi=permutazioni), in quali l'oggetto scende al posto i ? Deve succedere che gli $r-c$ oggetti che gli stanno sotto fra gli r si sistemano nelle ultime $n-i$ posizioni ($\binom{n-i}{r-c}$ casi), e che allo stesso tempo i $c-1$ che gli stanno sopra (di nuovo fra gli r) si assestano nelle prime $i-1$ posizioni ($\binom{i-1}{c-1}$ casi). Conclusione:

$$u_s(c, r) = \sum_{i=c}^{c+n-r} u(i) \cdot \frac{\binom{n-i}{r-c} \binom{i-1}{c-1}}{\binom{n}{r}}. \quad (1)$$

4 Soluzione con u tutto-o-niente

Prendiamo la u più semplice ed estrema che ci sia:

$$u(i) = \begin{cases} 1 & i = 1 \\ 0 & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Non vorrei essere nei suoi panni: se non prende il migliore non conclude niente; ma non può semplicemente 'prendere il migliore'; *qualunque* cosa faccia, gli può scappare.

Vediamo che strategia deve seguire per massimizzare l'utilità attesa. La semplificazione cruciale è che, come si verifica facilmente, la (1) diventa

$$u_s(c, r) = \begin{cases} r/n & c = 1 \\ 0 & c = 2, 3, \dots, r. \end{cases} \quad (2)$$

Risolviamo subito il caso $n = 2$ direttamente dalla optimality equation.^{0,1}

E veniamo al caso $n > 2$. Dalla (2) si vede subito che almeno, il valore di ogni nodo è positivo; in effetti possiamo facilmente verificare che

$$v(c, r) \geq 1/n \quad \forall(c, r), r < n. \quad (3)$$

E da questo deduciamo attraverso l'equazione di ottimalità che ad ogni passo $r < n$, se $c \neq 1$ si passa avanti:

$$v(c, r) > u_s(c, r) \quad r = 1, 2, \dots, n-1, c = 2, 3, \dots, r. \quad (4)$$

La seconda considerazione che possiamo fare è che intuitivamente, trovare un $c = 1$ ha più valore quanto più grande r ; dunque congetturiamo che se rifiuti il migliore fra r , lo devi rifiutare anche fra $r' < r$; formalmente:

$$\text{Se } v(1, r) > u_s(1, r), \text{ allora } v(1, r') > u_s(1, r') \quad \forall r' < r \leq n-1. \quad (5)$$

Basta dimostrarlo per $r' = r-1$, perchè poi per $r' = r-k$ basta applicare k volte il risultato valido per $r-1$; e per $r' = r-1$ la dimostrazione usando le optimality equations rilevanti non è difficile; prova a farla, e *dopo* guarda la nota.³

Le proprietà (4) e (5) ci mettono già in grado di indovinare la *forma* della strategia ottima; scrivila, poi controlla il seguito. Ponendo

$$r^* = \max \{r \mid v(1, r) > u_s(1, r)\},$$

la strategia ottima è la seguente:

Rifiuta i primi r^ oggetti; ai nodi (c, r) con $r^* < r < n$, accetta solo se $c = 1$.*

Dobbiamo verificare che l'insieme scritto sopra non è vuoto (a rigor di logica lo dovevamo fare prima); dimostriamo che contiene $r = 1$.⁴

Resta da trovare r^* . Intanto verifichiamo che $r^* < n-1$ (cioè che al nodo $(1, n-1)$ ti conviene accettare).⁵ Ora supponi che ai nodi $(1, r')$ con $r' > r$ accetti, e considera il nodo $(1, r)$: se rifiuti, al passo $r+1$ accetterai e prenderai $(r+1)/n$ se $c = 1$, altrimenti rifiuterai, e al nodo successivo si ripresenterà la stessa situazione, fino ad $r = n-1$, dove al passo successivo devi accettare in ogni caso (prendendo 1 con probabilità $1/n$, zero altrimenti). Dunque il valore di rifiutare ad $(1, r)$ è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r+1} \sum_{c=1}^{r+1} v(c, r+1) &= \frac{1}{r+1} \frac{r+1}{n} + \frac{r}{r+1} \frac{1}{r+2} \sum_{c=1}^{r+2} v(c, r+2) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{r}{r+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{r+1}{r+2} \frac{1}{r+3} \sum_{c=1}^{r+3} v(c, r+3) \right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \frac{r}{r+2} + \dots + \frac{r}{n-1} \frac{1}{n} \\ &= \frac{r}{n} \left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \dots + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

⁰ Le soluzioni e dimostrazioncine sono nelle note da 1 a 6, che non sono incluse nel file.

Dunque se da $r + 1$ in poi accetti $c = 1$, ad $(1, r)$ accetti (e prendi r/n) se e solo se

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r} \leq 1. \quad (6)$$

Nota che al crescere di r questa somma diminuisce (perchè saltano termini). E a questo punto possiamo concludere:

$$r^* = \max \left\{ r : \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{r} > 1 \right\}.$$

Dimostrazione di questo, in nota. ⁶

Due esempi numerici: per $n = 5$ e 10 , $r^* = 2$ e 3 rispettivamente.