# Insiemi

Salvatore Modica [1]

Sommario.



*Continuiamo ad assumere*, come in Usare i Numeri, [2] l'esistenza di $\mathbb{R}$ con le sue proprietà fondamentali, algebriche, di ordinamento e di continuità. La teoria degli insiemi 'vera' parte assumendo molto meno — e vola alto. Per esempio noi definiremo senza problemi famiglie di insiemi del tipo $B = \{A\colon A \text{ soddisfa la proprietà } \mathsf{P}\}$, e invece i problemi ci sono: se $\mathsf{P} = A \notin A$, $B = \{A\colon A \notin A\}$ da cui $B \in B \Leftrightarrow B \notin B$ (questo è noto come 'Paradosso di Russell'). Per fortuna la teoria degli insiemi risolve questi problemi di coerenza logica e noi — volando basso — possiamo andare avanti (per inciso, quando formeremo famiglie di insiemi che soddisfano una certa proprietà lo faremo in modo 'lecito').

## 1. Generalità

Per insiemi $A, B$ porremo $AB = A \cap B$, e *se* $AB = \emptyset$, $A + B = A \cup B$; useremo $A \subseteq B$ e $A \subset B$ per indicare inclusione ed inclusione propria ($A \subseteq B \,\&\, B \nsubseteq A$).

**Definizione 1.1.** Scriveremo: $A \sim B$ se $A$ e $B$ non sono vuoti ed esiste una biiezione fra $A$ e $B$, oppure se $A = B = \emptyset$; $A \preccurlyeq B$ se $\exists C \subseteq B$ tale che $A \sim C$; $A \prec B$ se $A \preccurlyeq B$ e $B \not\preccurlyeq A$. [3]

$A \sim B$ ed $A \prec B$ sono formalizzazioni di "$A$ e $B$ sono grandi uguale" ed "$A$ è più piccolo di $B$". In ogni famiglia di insiemi, $\sim$ è chiaramente

[1] Università di Palermo, Istituto di Matematica per la Ricerca Operativa, 29.III.99. Note basate su K. Stromberg, *An Introduction to Classical Real Analysis*, Wadsworth & Brooks/Cole 1981 ed I.P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Frederick Ungar Publishing Co. 1955. Esercizi in più, ed anche una prima infarinatura sui numeri ordinali, sono in A. Kolmogorov, S. Fomin, *Introductory Real Analysis*, Dover 1970.

[2] UiN d'ora in poi

[3] Useremo anche $A \succcurlyeq B$ per $B \preccurlyeq A$ ed $A \succ B$ per $B \prec A$ (in termini di $\succcurlyeq$: $A \succ B \Leftrightarrow A \succcurlyeq B \,\&\, B \not\succcurlyeq A$).

una relazione di equivalenza (*esercizio*). [4] E' facile vedere che $A \sim B \Rightarrow A \succcurlyeq B \,\&\, B \succcurlyeq A$ (*si*?); vale la pena sapere subito che il viceversa è pure vero (è il teorema Bernstein–Schröder, pag.13).

**Esercizio 1.2.** Dimostra: Per ogni $A \neq \emptyset$ vale $A \succ \emptyset$. [5]

**Definizioni 1.3.** Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è **induttivo** se soddisfa (i) $1 \in A$ & (ii) $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$. [6] Porremo

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{x \in \mathbb{R} \colon x \in A \forall A \subseteq \mathbb{R} \text{ induttivo}\} \\ \mathbb{Z} &= \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N} \\ \mathbb{N}_n &= \mathbb{N} \cap [1, n]. \end{aligned}$$

Dunque $\mathbb{N}$ è definito come l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi di $\mathbb{R}$. Dalla definizione segue che $\mathbb{N}$ è induttivo, e che è contenuto in ogni altro insieme induttivo (*esercizio*). Osserviamo che $\mathbb{N}$ non è vuoto, perchè per esempio $1 \in \mathbb{N}$. La proposizione 2.2 p.3 darà senso alla scrittura $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$; e il corollario 2.3 dice che per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$, l'insieme dei primi $n$ naturali. Vale inoltre, (sottile) dimostrazione per esercizio, [7] la

**Proposizione 1.4.** $n \geq 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Dati $A_1, A_2, \dots$ scriveremo $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ per indicare l'insieme (o *famiglia*) che li ha per elementi. Analogamente a quanto fatto per due insiemi, se $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di insiemi disgiunti, cioè con $A_n A_m = \emptyset \;\forall n \neq m$ scriveremo $\sum_n A_n$ per $\cup_n A_n$ (ti conviene abituarti presto alla notazione $\sum_n A_n$). Vale (*esercizio*, soluzione in nota) [8] la seguente

**Proposizione 1.5.** Se $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ e $\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ sono famiglie di insiemi disgiunti ($\forall n \neq m \; A_n A_m = \emptyset$, $B_n B_m = \emptyset$) con $A_n \sim B_n \;\forall n$ allora $\sum_n A_n \sim \sum_n B_n$.

**Definizioni 1.6.** $A$ è **finito** se $A = \emptyset$ o $A \sim \mathbb{N}_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$; è **infinito** se non è finito. $A$ è **numerabile** se $A \sim \mathbb{N}$. Useremo le parole

---

[4] Per la definizione di relazione di equivalenza puoi vedere 'Relazioni e Rappresentazioni'.

[5] Soluzione. Non per fare prediche, ma per una volta devo dire che se non si perde un pò di tempo sui primi esercizi (senza guardare le soluzioni prima!) non si va avanti bene. Allora: $A \supset \emptyset \sim \emptyset$ sicché $A \succcurlyeq \emptyset$; d'altra parte $\emptyset \succcurlyeq A$ implicherebbe $A \sim \emptyset$ ($\emptyset$ è l'unico sottoinsieme di $\emptyset$), che è falso (applica la definizione). Dunque $A \succcurlyeq \emptyset \,\&\, \emptyset \not\succcurlyeq A$, cioè $A \succ \emptyset$.

[6] In 'UiN' (i) era "$0 \in I$". Con la versione presente sarà $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, quello che prima era $\mathbb{N}_+$. Nessuna differenza sostanziale.

[7] Soluzione. $[1, \infty)$ è induttivo, dunque contiene $\mathbb{N}$.

[8] Soluzione. Devi verificare che, date biiezioni $\phi_n \colon A_n \to B_n$, la funzione $\phi \colon \sum_n A_n \to \sum_n B_n$ definita ponendo $\phi(a) = \phi_n(a)$ per $a \in A_n$ è biiettiva.

inglesi *countable* per indicare 'finito o numerabile' ed *uncountable* per 'non countable' (cioè nè finito nè numerabile).

Il seguente fatto sarà dimostrato alla fine della prossima sezione, ma è un punto fermo che conviene fissare subito:

**Teorema 1.7.** $\mathbb{N}$ è infinito.

Corollario, ogni insieme numerabile è infinito (*giusto*?).

**Esempio.** Su $\mathbb{Z}$, l'insieme degli *interi*. $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, quindi è numerabile. Una biiezione, è facile verificarlo, è la $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definita da (disegna)

$$f(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n > 0 \\ -2n+1 & \text{se } n \leq 0 \end{cases}.$$

Nota: $f^{-1}(1) = 0, f^{-1}(2) = 1, f^{-1}(3) = -1, \dots, f^{-1}(2n) = n, f^{-1}(2n+1) = -n, \dots$, cioè: la $f^{-1}$ enumera $\mathbb{Z}$ come $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

## 2. $\mathbb{N}$

Ci sono tre risultati fondamentali. Primo, il *Principio di Induzione*, conseguenza immediata della definizione di $\mathbb{N}$:

**Teorema (Ind).** Se $S \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo, allora $S = \mathbb{N}$.

Se $P_n$ e $\neg P_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sono una proposizione e la sua negazione, "dimostrare per induzione $\forall n\ P_n$" vuol dire dimostrare che l'insieme $S = \{n \in \mathbb{N}\colon P_n\}$ è induttivo (e concludere che $S = \mathbb{N}$ dal teorema), cioè dimostrare (i) $P_1$ & (ii) $\forall n\ (P_n \Rightarrow P_{n+1})$. Per come ricondurre al caso presente l'asserto "vale $P_n$ per ogni $n \geq n_0$" vedi UiN.

**Esercizio 2.1.** Dimostra: se $m, n \in \mathbb{N}$ allora $m + n$, $mn \in \mathbb{N}$. [9]

Il secondo risultato su $\mathbb{N}$ è la cosiddetta *Proprietà di Archimede*: per ogni $x > 0$ ed $y \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$. Ciò è equivalente (*esercizio*) alla proprietà della seguente

**Teorema (Arch).** $\mathbb{N}$ non è limitato superiormente.

*Dim.* Se lo fosse avrebbe estremo superiore, diciamo $\sigma$; per definizione di sup esisterebbe $\overline{n} \in \mathbb{N}$ con $\overline{n} > \sigma - 1$; ma $\mathbb{N}$ è induttivo, sicchè $\mathbb{N} \ni \overline{n} + 1 > \sigma$; contraddizione. $\square$

Sulla seguente proposizione si fonda la scrittura $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$:

**Proposizione 2.2.** $(n, n+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset\ \forall\ n \in \mathbb{N}$. [10]

---

[9] Soluzione. $m + n$: fissa $m \in \mathbb{N}$ e poni $S = \{n \in \mathbb{N}\colon m + n \in \mathbb{N}\}$; $1 \in S$ perché $\mathbb{N}$ è induttivo; e se $n \in S$ (cioè $m + n \in \mathbb{N}$), $m + (n + 1) = (m + n) + 1 \in \mathbb{N}$, cioè $n + 1 \in S$. L'altro è analogo (usando anche la parte già dimostrata).

[10] Ricorda che $(n, n+1) = \{x \in \mathbb{R}\colon n < x < n + 1\}$.

*Dim.* Dimostreremo le proprietà $(A), (B)$ e $(C)$ che ora specifichiamo, e infine che $(i)$ & $(C) \Rightarrow (ii)$.

$$\begin{aligned}
&(A): \ n \in \mathbb{N} \ \& \ n > 1 \Rightarrow n-1 \in \mathbb{N} \\
&(B): \ x \in \mathbb{R}, x > 0 \ \& \ x+n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N} \\
&(C): \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m > n \Rightarrow m-n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

$(A)$ segue dal fatto che $S = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N} : \ n-1 \in \mathbb{N}\}$ è induttivo (*da verificare* l'induttività e l'implicazione asserite). Per $(B)$, fissa $x > 0$ e considera $T = \{n \in \mathbb{N} : \ x+n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \mathbb{N}\}$: da $(A)$ segue $1 \in T$, ed è non difficile *esercizio* finire di verificare che in effetti $T$ è induttivo; ciò implica $(B)$. $(C)$ segue da $(B)$ con $x = m-n$. A questo punto: se (ii) fosse falso, esisterebbero $n, a \in \mathbb{N}$ con $n < a < n+1$; sarebbe allora $a - n < 1$ e (per $(C)$) $a - n \in \mathbb{N}$; ma per (i) questo è impossibile. $\square$

Notiamo il già annunciato

**Corollario 2.3.** Per ogni $n \in \mathbb{N}$ è $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

*Dim.* Per induzione: $\mathbb{N}_1 = \{1\}$, e se $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ sarà $\mathbb{N}_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}$ usando 2.2. $\square$

Usando la proposizione 1.4 ricaviamo che $\exists \min \mathbb{N} = 1$; il terzo teorema su $\mathbb{N}$ dice che $\exists \min A$ per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto. Questo si esprime dicendo che $\mathbb{N}$ è *ben ordinato* (in inglese 'well ordered').

**Teorema (WO).** $\forall \emptyset \neq A \subseteq \mathbb{N} \ \exists \min A$ (cioè $\inf A \in A$).

*Dim.* Supponi esista $A \subseteq \mathbb{N}$ non vuoto senza minimo; considera l'insieme dei naturali minoranti di $A$, $S = \{n \in \mathbb{N} : \ \forall m \in A \ n < m\}$; per (i) sopra $1 \in S$ (altrimenti $1 \in A$ e $\min A = 1$); e se $n \in S$, se fosse $n+1 \notin S$ sarebbe (usando 2.2, *esercizio*) $n+1 = \min A$; dunque $S$ è induttivo, da cui $S = \mathbb{N}$. Ma allora sarebbe $A \subseteq S$, sicchè esisterebbero $n$ —tutti quelli in $A$— con $n < n$, contraddizione. $\square$

*Dim. del Teorema 1.7.* Supponi $\mathbb{N}$ finito; non è vuoto, quindi esiste qualche $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_n$; per il teorema WO esiste il minimo di tali $n$, diciamo $\bar{n}$, che è maggiore di 1 (giusto?); ma allora, con $f \colon \mathbb{N}_{\bar{n}} \to \mathbb{N}$ biiettiva, si può definire $g \colon \mathbb{N}_{\bar{n}-1} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$g(k) = \begin{cases} f(k) & \text{se } f(k) < f(\bar{n}) \\ f(k) - 1 & \text{se } f(k) > f(\bar{n}), \end{cases}$$

e tale $g$ è biiettiva fra $\mathbb{N}_{\bar{n}-1}$ ed $\mathbb{N}$ (che è iniettiva si vede meccanicamente, e per la suriettività osserva che con $m \in \mathbb{N}$ è $m = g(f^{-1}(m))$ o $m = g(f^{-1}(m+1))$ se rispettivamente $m < f(\bar{n})$ o $m \geq f(\bar{n})$); ciò contraddice la minimalità di $\bar{n}$. $\square$

# 3. Insiemi finiti

Se $A \sim \mathbb{N}_n$, ogni $f\colon \mathbb{N}_n \to A$ biunivoca determina una **enumerazione** di $A$, ottenuta scrivendo $A = \{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$. Per esempio se $A = \{\text{Aldo}, \text{Emilia}\} \sim \{1, 2\}$ ed $f(1) = \text{Emilia}$, $f(2) = \text{Aldo}$ l'enumerazione determinata da $f$ dà $A = \{\text{Emilia}, \text{Aldo}\}$. Di solito si allegerisce la notazione ponendo $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, e si scrive $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \equiv \{a_k\}_{k=1}^n$. Analogamente se $A \sim \mathbb{N}$ scriveremo $A = \{a_1, a_2, \dots\} \equiv \{a_k\}_{k=1}^\infty$ sottintendendo la scelta di una biiezione $f\colon \mathbb{N} \to A$ con $f(k) = a_k$, $k \in \mathbb{N}$.

Cominciamo con un risultato che suona ovvio, che i sottoinsiemi di insiemi finiti sono anch'essi finiti; ovvio corollario è che gli insiemi che contengono un insieme infinito sono infiniti:

**Lemma 3.1.** Se $A$ è finito e $B \subseteq A$, $B$ è finito.

*Dim.* L'asserto è chiaramente vero per l'insieme vuoto, sicchè resta da dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$, se $A \sim \mathbb{N}_n$ e $B \subseteq A$ allora $B$ è finito. Per induzione: con $n = 1$ l'asserto è vero; supponiamolo vero per $n$, prendiamo $A \sim \mathbb{N}_{n+1}$, fissiamone una enumerazione, $A = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}\}$, e consideriamo $B \subseteq A$; da dimostrare che $B$ è finito. Se $B \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$, $B$ è finito per l'ipotesi induttiva; altrimenti $a_{n+1} \in B$, e allora o $B = A$, che è finito, oppure esiste $a \in \{a_1, \dots, a_n\} \setminus B$. In tal caso definiamo $f : B \to A$ ponendo $f(a_{n+1}) = a$ ed $f(b) = b$ per ogni $b \in B$ con $b \neq a_{n+1}$, ottenendo una biiezione fra $B$ e un $C \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$. Poichè $C$ è finito per l'ipotesi induttiva, $C \sim \mathbb{N}_m$ per qualche $m \in \mathbb{N}$; componendo $f$ e una qualunque biiezione fra $C$ ed $\mathbb{N}_m$ si ottiene una biiezione fra $B$ ed $\mathbb{N}_m$. $\square$

Il prossimo lemma dice che un insieme finito non è equivalente a nessun suo sottoinsieme proprio (vedremo in seguito, Inf2 pag.8, che in realtà vale anche l'inverso).

**Lemma 3.2.** Se esiste $B \subset A$ con $B \sim A$, $A$ è infinito.

*Dim.* Intanto se esiste tale $B$, $A$ e $B$ devono essere non vuoti, quindi esiste $f\colon A \to B$ biiettiva; prendi $a \in A \setminus B$; e definisci $\phi\colon \mathbb{N} \to A$ ('per ricursione') ponendo $\phi(1) = a$ e $\phi(n+1) = f(\phi(n))$. [11] Se dimostriamo che $\phi$ è iniettiva otteniamo il risultato, perché in tal caso abbiamo una biiezione fra $\mathbb{N}$ e $\phi(\mathbb{N}) \subseteq A$, [12] da cui $A$, contenendo un insieme infinito, è esso stesso infinito (lemma 3.1).

Per dimostrare che $\phi$ è iniettiva basta verificare che $\forall\ n > 1$: $1 \leq i, j \leq n \,\&\, i \neq j \ \Rightarrow\ \phi(i) \neq \phi(j)$. L'asserto è vero per $n = 2$; poiché per ogni $n > 1$ è $\phi(n) \neq \phi(1)$ ($\phi(n) \in B$ mentre $\phi(1) \notin B$) abbiamo poi:

[11] Per i curiosi, domanda: è ben posta questa definizione? In effetti, dicendo definisci $\varphi(n+1)$ come $f(\varphi(n))$ si usa un valore di $\varphi$ prima di (finire di) definire $\varphi$. Che esiste, unica, una funzione $\varphi\colon \mathbb{N} \to A$ tale che $\varphi(1) = a$ e $\forall n \in \mathbb{N}\ \varphi(n+1) = f(\varphi(n))$ è in realtà *un teorema* di teoria degli insiemi.

[12] Ricorda che $\phi(\mathbb{N}) = \{x \in A\colon \exists n \in \mathbb{N} \text{ tale che } x = \phi(n)\}$.

$\exists j \in \{1,\ldots,n\}$ con $\phi(n+1) = \phi(j) \Leftrightarrow \exists j \in \{2,\ldots,n\}$ con $\phi(n+1) = \phi(j) \Leftrightarrow f(\phi(n)) = f(\phi(j-1)) \Leftrightarrow \phi(n) = \phi(j-1)$, sicché se l'asserto è falso per $n+1$ è falso anche per $n$ (dunque se vale per $n$ varrà anche per $n+1$). □

**Corollario 3.3.** $\forall n, m \in \mathbb{N},\ \mathbb{N}_m \sim \mathbb{N}_n \Leftrightarrow m = n$.

*Dim.* Se $m < n$ (risp. $m > n$), se fosse $\mathbb{N}_m \sim \mathbb{N}_n$ avremmo $\mathbb{N}_n$ (risp. $\mathbb{N}_m$) equivalente ad un suo sottoinsieme proprio, impossibile per il lemma 3.2; in altre parole $m \neq n \Rightarrow \mathbb{N}_m \not\sim \mathbb{N}_n$, da cui il risultato. □

Conseguenza (*immediata*) importante:

**Teorema (Fin1).** Per ogni $A \neq \emptyset$ finito esiste *unico* $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \sim \mathbb{N}_n$. Tale numero verrà indicato con il simbolo $\#A$.

**Esercizio 3.4.** Controlla: (i) $\#\mathbb{N}_n = n$; (ii) $A \sim \mathbb{N}_{\#A}$; (iii) $A \sim B \Leftrightarrow \#A = \#B$ (iv) $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_n \Leftrightarrow m < n$.

L'espressione '$A$ ha $n$ elementi' vorrà dire $\#A = n$ (cioè $A \sim \mathbb{N}_n$); porremo inoltre $\#\emptyset = 0$. A questo punto abbiamo su più solide basi i risultati sugli insiemi finiti di UiN (per es. esistenza di massimo e minimo ed esistenza di $[x]$ —massimo intero contenuto in $x$) che puoi velocemente riguardare.

Se $A \subset B$ ($A, B$ finiti) è naturale dire $A$ è "più piccolo" di $B$; lo stesso vorremmo dire per $A = \{5\}$ e $B = \{\alpha, \beta\}$, perché anche se $A \not\subset B$ è $A \sim \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}_2 \sim B$. Vale per qualunque coppia di insiemi finiti $A, B$ l'equivalenza $\#A < \#B \Leftrightarrow A \sim \mathbb{N}_{\#A} \subset \mathbb{N}_{\#B} \sim B$ (usa 3.4(iv)); quindi $\#A < \#B$ è una naturale formalizzazione di "$A$ è più piccolo di $B$"; di quest'idea abbiamo già visto un'altra formalizzazione, $A \prec B$, e la prima parte del teorema che segue dice che le due cose si equivalgono (per fortuna). La parte (ii) dice che se $A \subset B$ allora $A$ è più piccolo di $B$ nel senso (naturale) di $\prec$; sappi che questo *non* vale per gli insiemi infiniti: l'insieme dei naturali pari $\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : n = 2m$ per qualche $m \in \mathbb{N}\}$ è $\subset \mathbb{N}$, ma è anche equivalente ad $\mathbb{N}$ (*facile*), quindi tale che $\mathbb{P} \not\prec \mathbb{N}$ (perché $\mathbb{P} \preccurlyeq \mathbb{N}$ & $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{P}$).

**Teorema (Fin2).** Siano $A, B$ finiti.

(i) $A \prec B \Leftrightarrow \#A < \#B$;
(ii) $A \subset B \Rightarrow A \prec B$.

**Lemma 3.5.** $\forall n \in \mathbb{N},\ A \subset \mathbb{N}_n \Rightarrow \#A < n$.

*Dim.* Dal lemma 3.1 $A$ è finito; se $A = \emptyset$ l'asserto è banale; sia allora $A \sim \mathbb{N}_m$ (cioè $\#A = m$); se fosse $m \geq n$ sarebbe $\mathbb{N}_m$ equivalente al suo sottoinsieme proprio $A$ ($A \subset \mathbb{N}_n \subseteq \mathbb{N}_m$), impossibile (lemma 3.2). □

*Dim. del Teorema.* (i) $\Rightarrow$: $A \prec B \Rightarrow A \sim C$ per un $C \subset B$ (se fosse $C = B$ sarebbe anche $A \succcurlyeq B$), e da questo e $B \sim \mathbb{N}_{\#B}$ a sua volta

$C \sim D$ per un $D \subset \mathbb{N}_{\#B}$ (prendi una biiezione $f\colon B \to \mathbb{N}_{\#B}$ e poni $D = f(C)$); dunque $A \sim D \subset \mathbb{N}_{\#B}$, da cui (lemma 3.5 ed esercizio 3.4(iii)) la tesi.

$\Leftarrow$: $\#A < \#B \Rightarrow A \sim \mathbb{N}_{\#A} \subset \mathbb{N}_{\#B} \sim B$ (usando $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_n \Leftrightarrow m < n$) quindi $A \sim C$ per un $C \subset B$ (*come poco fa*); da ciò $A \preccurlyeq B$, e non è $B \preccurlyeq A$ perchè altrimenti esisterebbe $D \subseteq A$ con $B \sim D$, ma $B \sim D \subseteq A \sim C$ implicherebbe $B \sim E$ per un $E \subseteq C \subset B$, impossibile per il lemma 3.2.

(ii): l'ipotesi implica che $A \sim C$ per un $C \subset \mathbb{N}_{\#B}$; da lemma 3.5 ed esercizio 3.4(iii) $\#A < \#B$; conclusione da (i). $\square$

Nota che per insiemi finiti il teorema Bernstein–Schröder è facile corollario di Fin1: $A \preccurlyeq B \,\&\, B \preccurlyeq A \;\Leftrightarrow\; A \not\prec B \,\&\, B \not\prec A \;\Leftrightarrow\; \#A = \#B \;\Leftrightarrow\; A \sim B$.

**Esercizio 3.6.** (i) Dimostra che il $\Leftrightarrow$ nel teorema Fin2(i) è equivalente a: $A \preccurlyeq B \Leftrightarrow \#A \leq \#B$;

(ii) Dimostra: $\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{N}_m \preccurlyeq \mathbb{N}_n \;\Leftrightarrow\; \mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n$. [13]

## 4. Insiemi infiniti; insiemi numerabili

Stabiliremo (teorema Inf1) che gli insiemi numerabili sono 'i più piccoli' fra gli insiemi infiniti (sappiamo che sono infiniti dal teorema 1.7), e che (teorema Inf2) gli insiemi infiniti sono caratterizzati dall'avere un sottoinsieme proprio equivalente (cf. lemma 3.2 pag.5). Proveremo inoltre la numerabilità di alcuni insiemi 'generati' da insiemi numerabili (unioni numerabili e prodotti finiti di insiemi numerabili), di uso frequente.

Vale intanto, analogamente al caso degli insiemi finiti, la seguente

**Proposizione 4.1.** Se $A$ è countable e $B \subseteq A$, $B$ è countable.

*Dim.* Il caso di $A$ finito lo conosciamo già; quindi sia $A$ numerabile, enumerato come $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; supponiamo $B \subseteq A$ infinito, e costruiamo (di nuovo ricorsivamente) una enumerazione di $B$ come segue: poichè $B \neq \emptyset$ esistono $n \in \mathbb{N}$ tali che $a_n \in B$; per il teorema WO esiste il minimo di questi; sia esso $n(1)$; poi per ogni $k \in \mathbb{N}$, avendo già $n(1), n(2), \ldots, n(k)$ definiamo $n(k+1)$ come il minimo $n > n(k)$ tale che $a_n \in B \setminus \{a_{n(1)}, a_{n(2)}, \ldots, a_{n(k)}\}$ (che esiste come poco fa); resta così enumerato un insieme $\{a_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subseteq B$, e questa inclusione è in effetti una uguaglianza, perché: se $x \in B$ è $x = a_n$ per un $n$; $\sup\{n(k)\colon k \geq 1\} = \infty$ (facile per induzione $n(k) \geq k \;\forall k$, poi usa

---

[13] Soluzione (ii). Sappiamo $\mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n \Leftrightarrow m \leq n$, sichè basta dimostrare $\mathbb{N}_m \preccurlyeq \mathbb{N}_n \Leftrightarrow m \leq n$. Se $m \leq n$, $\mathbb{N}_m \subseteq \mathbb{N}_n$ da cui $\mathbb{N}_m \preccurlyeq \mathbb{N}_n$; viceversa, se $m > n$ è $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_m$ da cui $\mathbb{N}_m \not\preccurlyeq \mathbb{N}_n$ perchè altrimenti avremmo un $B \subseteq \mathbb{N}_n$ con $B \sim \mathbb{N}_m$, e (usando $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_m$) un $C \subset B$ con $C \sim \mathbb{N}_n$ da cui $\mathbb{N}_n \sim C \subset \mathbb{N}_n$, contraddizione del fatto che $\mathbb{N}_n$ è finito (lemma 3.2).

$\sup \mathbb{N} = \infty$), dunque $\emptyset \neq \{k \colon n(k) \geq n\} \subseteq \mathbb{N}$; se $k^*$ è il suo minimo (che esiste per WO), per costruzione $a_n \in B \setminus \{a_{n(1)}, \dots, a_{n(k^*-1)}\}$ ed $n \leq n(k^*)$; e questo implica $a_n = a_{n(k^*)}$ (definizione di $n(k^*)$). □

**Lemma 4.2.** Sia $A_1, A_2, \dots$ una successione di insiemi finiti, disgiunti (cioè con $A_m A_n = \emptyset$ per $m \neq n$), e con $\sum_{k=1}^{\infty} \# A_k = \infty$ (vero per esempio se $A_k \neq \emptyset \; \forall k$). Allora:

(i) $\sum_{k=1}^{n} A_k$ è finito $\forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sim \mathbb{N}$.

*Dim.* (i) Facile osservare che $\sum_{k=1}^{n} A_k \sim \mathbb{N}_{\sum_{k=1}^{n} \# A_k}$.

(ii) Sia $A \equiv \sum_{k=1}^{\infty} A_k$; siano $\varphi_k \colon A_k \to \mathbb{N}_{\# A_k}$ biiezioni, e definisci $\varphi \colon A \to \mathbb{N}$ ponendo $\varphi(a) = \sum_{i=1}^{k-1} \# A_i + \varphi_k(a)$ per $a \in A_k$ (stiamo definendo $\varphi(a) = \varphi_1(a)$ per $a \in A_1$, ponendo per convenzione $\sum_{k=1}^{0} x_i \equiv 0$). Questa $\varphi$ è iniettiva: è chiaro che $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$ se $a, b$ sono in uno stesso $A_k$; e se $a \in A_k$, $b \in A_j$ con $k < j$ è $\varphi(a) < \varphi(b)$. E' anche suriettiva, perchè: $\sum_k \# A_k = \infty$, sicchè $\{n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n} \# A_k \geq m\} \neq \emptyset$; sia $\overline{n}$ il suo minimo (che esiste da WO); allora $\sum_{k=1}^{\overline{n}-1} \# A_k < m \leq \sum_{k=1}^{\overline{n}} \# A_k$, da cui $m = \varphi(a)$ per qualche $a \in A_{\overline{n}}$. □

**Teorema (Inf1).** Ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile (in termini di $\succcurlyeq$: per ogni $A$ infinito vale $A \succcurlyeq \mathbb{N}$).

*Dim.* Sia $A$ infinito. Facile per induzione che $\forall n \in \mathbb{N} \exists \; B_n \subseteq A$ con $\# B_n = n$; definisci ora $B \equiv \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Questo $B$ è infinito: assumi al contrario che sia finito, sia $B \sim \mathbb{N}_{\overline{n}}$; prendi $n \in \mathbb{N}$ arbitrario; da $\mathbb{N}_n \sim B_n \subset B \sim \mathbb{N}_{\overline{n}}$ si ottiene $\mathbb{N}_n \sim C$ per un $C \subset \mathbb{N}_{\overline{n}}$; dal lemma 3.5 è allora $n < \overline{n}$; questo dovrebbe valere per ogni $n$, che è impossibile (Arch). Sia ora $C_n \equiv B_n \setminus \big(\cup_{k=0}^{n-1} B_k\big)$ (poniamo $B_0 \equiv \emptyset$); è $B = \sum_{n \geq 1} C_n$, ed i $C_n$ sono finiti, disgiunti, e con $\sum_{n \geq 1} \# C_n = \infty$ perchè $B$ è infinito ($\sum_n \# C_n$ finito implicherebbe l'esistenza di un $m \in \mathbb{N}$ tale che $C_n = \emptyset$ per ogni $n > m$, sicchè sarebbe $\cup_{n \geq 1} C_n = \cup_{n=1}^{m} C_n$, finito per il lemma 4.2(i)); conclusione dal lemma 4.2(ii). □

**Esercizio 4.3.** Dimostra che se $A$ è finito e $B$ infinito è $A \prec B$. [14]

**Teorema (Inf2).** $A$ è infinito se e solo se esiste $B \subset A$ con $A \sim B$.

*Dim.* Una direzione è il lemma 3.2. Viceversa supponi $A$ infinito; per il teorema Inf1 contiene un numerabile $C = \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$; una biiezione $f \colon A \setminus \{c_1\} \to A$ è definita da $f(c_n) = c_{n-1}$, $n \geq 2$ ed $f(a) = a$, $a \in A \setminus C$. □

Le due cose da sapere sugli insiemi numerabili sono: prodotti *finiti* ed unioni numerabili di insiemi numerabili sono numerabili.

**Teorema (Cou1).** Se $A_i \sim \mathbb{N}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \sim \mathbb{N}$.

[14] Soluzione: $A \preccurlyeq B$ per Inf1; $B \not\preccurlyeq A$ usando il lemma 3.1.

*Dim.* Basta dimostrare $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ (*giusto?*), ed a tal fine definisci $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo $f(a,b) = 2^{a-1}(2b-1)$. Sia $n \in \mathbb{N}$; sia $2^{a-1}$ la più alta potenza di 2 per la quale $n$ è divisibile; [15]per costruzione $n/2^{a-1}$ è dispari, dunque esiste $b \in \mathbb{N}$ tale che $n/2^{a-1} = 2b-1$, cioè $f(a,b) = n$ ed $f$ è suriettiva. Se d'altra parte $2^{a-1}(2b-1) = 2^{\alpha-1}(2\beta-1)$ allora $2^{a-\alpha}(2b-1) = 2\beta-1$ sicchè deve essere $a = \alpha$ (altrimenti avremmo un pari uguale a un dispari), e dunque anche $b = \beta$, cioè $f$ è iniettiva. $\square$

**Lemma 4.4.** $A \neq \emptyset$ è countable se e solo se esiste una $f \colon \mathbb{N} \to A$ suriettiva.

*Dim.* Supponi $A$ countable; se $A$ è finito, diciamo $A = \{a_1, \ldots, a_p\}$, definisci $f(n) = a_n$ per $n \leq p$ ed $f(n) = a_1$ per $n > p$; se $A$ è numerabile scrivilo come $A = \{a_n\}_{n \geq 1}$ e definisci $f(n) = a_n$ per ogni $n$.

Supponi che esista $f \colon \mathbb{N} \to A$ suriettiva. Per ogni fissato $a \in A$ è $\emptyset \neq \{n : f(n) = a\} \subseteq \mathbb{N}$ dunque per WO esiste $n(a) = \min\{n : f(n) = a\}$; definisci $g \colon A \to \mathbb{N}$ ponendo $g(a) = n(a)$; per costruzione $g$ è iniettiva, sicchè $A \sim g(A) \subseteq \mathbb{N}$; conclusione dalla proposizione 4.1. $\square$

**Esercizio 4.5.** Dimostra che se esistono $N \subseteq \mathbb{N}$ ed $f \colon N \to A$ suriettiva, allora esiste una $g \colon A \to \mathbb{N}$ iniettiva.

**Teorema (Cou2).** Siano $A_i$ insiemi countable per ogni $i \in I$; se $I$ è countable, lo è anche $A = \cup_{i \in I} A_i$.

*Dim.* Possiamo assumere $I, A_i \neq \emptyset$. Per il lemma precedente esistono funzioni $g \colon \mathbb{N} \to I$ ed $f_i \colon \mathbb{N} \to A_i$ suriettive; definisci $h \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A$ ponendo $h(m,n) = f_{g(n)}(m)$; questa è suriettiva (perchè : se $a \in A$ esiste $i \in I$ tale che $a \in A_i$; e per costruzione esistono allora $m$ tale che $f_i(m) = a$ ed $n$ tale che $g(n) = i$, cioè esiste $(m,n)$ tale che $h(m,n) = a$); conclusione da lemma 4.4 e teorema Cou1. $\square$

**Corollario 4.6.** $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

*Dim.* $\mathbb{Q} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{m/n : m \in \mathbb{Z}\}$, unione numerabile di insiemi numerabili, numerabile per Cou2. $\square$

Nota inoltre che da Cou2 segue in particolare che se $A$ è numerabile e $B$ countable è $A \cup B \sim A$; da questo ricaviamo più in generale, dimostrazione per *esercizio*: [16]

**Proposizione (IuC).** Se $A$ è infinito e $C$ countable, allora $A \cup C \sim A$.

**Esercizio 4.7.** Dimostra che l'insieme dei punti di discontinuità di una funzione $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona è finito o numerabile. Devi usare il corollario 4.6 e la proposizione 4.1, e un pò di matematica generale.

---

[15]Cioè $a = \max\{k \in \mathbb{N} : n/2^{k-1} \in \mathbb{N}\}$, per esempio se $n$ è dispari $a = 1$; l'insieme è finito —*giusto?*— sicchè il massimo esiste.

[16]Soluzione: Sia $D = C \setminus A$ ($\subseteq C$ dunque countable da 4.1) così $A \cup C = A + D$; $A$ contiene un $B$ numerabile, quindi $A + D = (A \setminus B) + (B \cup D) \sim (A \setminus B) + B = A$ usando teorema Cou2 e proposizione 1.5.

## 5. Insiemi non numerabili

Solo per dire che gli insiemi non numerabili sono 'più grandi' di quelli numerabili. Il teorema qui sotto dice che un sottoinsieme countable in un insieme uncountable 'nemmeno si vede'; la proposizione che segue non dovrebbe quindi sorprendere.

**Teorema (Unc).** Se $A$ è uncountable e $B$ un suo sottoisieme countable, $A \setminus B \sim A$.

*Dim.* $A' \equiv A \setminus B$ non può essere finito perché altrimenti $A$ sarebbe countable (teorema Cou2); quindi $A' \cup B \sim A'$ (IuC), che è la tesi. $\square$

**Proposizione 5.1.** Se $A$ è uncountable e $B$ countable, $A \succ B$.

*Dim.* $A \succcurlyeq B$ dal teorema Inf1, $B \not\succcurlyeq A$ dalla proposizione 4.1. $\square$

La coppia più famosa di countable–uncountable è senza dubbio quella di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$, e lo registriamo in una

**Proposizione.** $\mathbb{Q} \prec \mathbb{R}$, ed $\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

## 6. $[0, 1]$

In questa sezione dimostreremo che $[0, 1]$ è uncountable, e che

$$[0, 1] \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}.$$

**Lemma 6.1.** Sia $\{[a_n, b_n] \colon n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di intervalli (chiusi e limitati) di $\mathbb{R}$ tali che (i) $\forall n\ [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$, e (ii) $\forall \epsilon > 0\ \exists n$ tale che $b_n - a_n < \epsilon$. Allora $\cap_{n\geq 1}[a_n, b_n] = \{x_0\}$ per un $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Dim.* Siano $n, m \in \mathbb{N}$ arbitrari, e $k = \max\{n, m\}$; per (i) risulta allora $a_n \leq a_k \leq b_k \leq b_m$, cioè ogni elemento di $A \equiv \{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ è $\leq$ di ogni elemento di $B \equiv \{b_n \colon n \in \mathbb{N}\}$; sicchè per ogni $n$ si ha $a \equiv \sup A \leq b_n$ e $b \equiv \inf B \geq a_n$ (nota che ciò implica $a \leq b$); allora per ogni $x \in [a, b]$ è $a_n \leq a \leq x \leq b \leq b_n$ per ogni $n$ (definizione di inf e sup) cioè $[a, b] \subseteq \cap_{n\geq 1}[a_n, b_n]$, che è dunque non vuoto. Poi: dato $\epsilon > 0$, preso $n$ tale che $b_n - a_n < \epsilon$ (che esiste per (ii)) si ottiene $b - a < \epsilon$; da ciò $a = b$; conclusione, $\cap_{n\geq 1}[a_n, b_n] = \{a\}$ $(= \{b\})$. $\square$

**Teorema 6.2.** L'intervallo $[0, 1]$ è uncountable. [17]

*Dim.* Per contraddizione: assumilo countable; poichè la funzione $n \mapsto 1/n$ è iniettiva da $\mathbb{N}$ in $[0, 1]$, questo non è finito (*giusto*?), dunque è numerabile; ma allora esiste $\{x_n\}_{n\geq 1}$ tale che $[0, 1] = \{x_n\}_{n\geq 1}$; dimostreremo che ciò è impossibile trovando $x \in [0, 1]$ con $x \neq x_n\, \forall n$. Dividi $[0, 1]$ in tre intervalli chiusi uguali ($[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$) e scegline uno che *non* contiene $x_1$, chiamalo $I_1$; dividi $I_1$ in tre come prima, e chiama $I_2$ uno dei tre che non contiene $x_2$; e continua: scelto $I_n$, dividilo

[17] Un insieme equivalente a $[0, 1]$ si dice un **continuum**.

in tre e chiama $I_{n+1}$ uno dei tre che non contiene $x_{n+1}$; si definisce così una famiglia di intervalli che soddisfa le ipotesi del lemma 6.1 (per induzione la lunghezza di $I_n$ è $1/3^n < 1/n$), sicchè $\cap_{n\geq 1} I_n = \{x\}$ per un $x \in \mathbb{R}$; ma per costruzione tale $x \in [0,1]$, e d'altra parte per ogni $n$ è $x \neq x_n$ (perché $x \in I_n$ ed $x_n \notin I_n$). □

**Corollario 6.3.** Se $I$ è un qualunque intervallo di $\mathbb{R}$ (chiuso, aperto, semiaperto), $[0,1] \sim I$.

*Dim.* $[0,1] \sim [a,b]$, con biiezione $f\colon [0,1] \to [a,b]$ data da $f(x) = a + (b-a)x$; e togliendo uno o due elementi ad un insieme infinito se ne ottiene uno equivalente (usa IuC). □

**Lemma 6.4.** Se $A_n \sim [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ed $A_n \cap A_m = \emptyset$ per $n \neq m$, allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim [0,1]$.

*Dim.* Sia $a_n = 1 - 1/n$, $n \in \mathbb{N}$; dal corollario 6.3 $A_n \sim [a_n, a_{n+1})$ sicché $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim \sum_{n\in\mathbb{N}} [a_n, a_{n+1}) = [0,1)$ ($\sim$ dalla proposizione 1.5). Dal corollario 6.3 la tesi. [18] □

**Teorema 6.5.** $\mathbb{R} \sim [0,1]$.

*Dim.* Dal lemma, scrivendo $\mathbb{R} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big( [-n, -n+1) + [n-1, n) \Big)$. □

**Lemma 6.6.** $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$ ($\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle sequenze di naturali).

*Dim.* Posto $Q = \{x \in (0,1]\colon \exists m, n \in \mathbb{N}$ tali che $x = m/2^n\}$ ed $R = (0,1] \setminus Q$, da $Q \subseteq \mathbb{Q}$ e teorema Unc (pag. 10) segue $R \sim (0,1]$; dimostreremo $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim R$.

Ricordiamoci della espansione binaria degli $x \in (0,1]$ (UiN, oppure — più dettagliato — Stromberg p.66): per ogni $x \in R$ esiste unica una sequenza $(x_k)_{k\geq 1}$ con $x_k \in \{0,1\}$ $\forall k$ e tale che per ogni $k$ esiste $k' > k$ con $x_{k'} = 1$, tale che $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^k$; e viceversa data una tale sequenza, $\sum_{k=1}^{\infty} x_k/2^k \in (0,1]$. Dunque $R$ è equivalente all'insieme di queste sequenze; d'altra parte ognuna di esse è univocamente identificata dalla sequenza dei $k$ tali che $x_k = 1$ (ce ne sono infiniti per costruzione); sicché possiamo concludere (*o no?*) che $R \sim \{(k_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\colon i < j \Rightarrow k_i < k_j\} \equiv S$ (le sequenze crescenti di naturali). [19] Ma $S \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$: una biiezione è definita associando la sequenza $(n_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ alla sequenza $(k_i)_{i\geq 1} \in S$ con $k_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$. □

**Teorema 6.7.** $\mathbb{R}^n \sim [0,1]$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

*Dim.* Basta $\mathbb{R}^2$ (poi si finisce per induzione); dimostriamo $[0,1]^2 \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, per concludere invocando teorema 6.5 e lemma 6.6; fissiamo una biiezione $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (esiste dal lemma 6.6); dati $x, y \in [0,1]$, sia

[18] D'ora in avanti il ricorso finale al corollario 6.3 lo sottintenderemo.

[19] Se non fosse chiaro, la sequenza $(3, 8, 13, \dots)$ corrisponde all'$x \in R$ la cui espansione binaria ha 1 ai posti $3, 8, 13, \dots$.

$\phi(x) = (x_i)_{i\geq 1}$, $\phi(y) = (y_i)_{i\geq 1}$; definisci $\Phi(x,y) = (z_i)_{i\geq 1}$ ponendo $z_i = x_i$ per $n$ pari, $z_i = y_i$ per $n$ dispari; è chiaro che $\Phi$ è una biiezione fra $[0,1]^2$ ed $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (*yes?*). $\square$

**Teorema 6.8.** $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ è l'insieme delle sequenze di reali).

*Dim.* Basta $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (lemma 6.6); fissa (per tutta la dimostrazione) una biiezione $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (esiste: teorema 6.5 e lemma 6.6); sia $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, e sia $(x_{ki})_{i\geq 1} = \phi(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$; definisci $\Phi(x) = (z_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ponendo per $\sum_{j=0}^{k-1} j < i \leq \sum_{j=0}^{k-1} j + k$, $k = 1, 2, \ldots$

$$z_i = x_{i-\sum_{j=0}^{k-1} j\,,\,1+\sum_{j=0}^{k} j-i}\;.$$ [20]

$\Phi$ è iniettiva per costruzione; per vedere che è suriettiva sia data $(n_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$; chiama "blocco $k$–esimo" di $(n_i)$ gli elementi con $\sum_{j=0}^{k-1} j < i \leq \sum_{j=0}^{k} j$; [21] e definisci $x = (x_k)_{k\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ponendo $x_k = \phi^{-1}\big((x_{ki})_{i\geq 1}\big)$ dove per $i = 0, 1, \ldots,$ $x_{k,i+1}$ è il $(k-i)$–esimo elemento del $(k+i)$–esimo blocco di $(n_i)$; $\Phi(x) = (n_i)_{i\geq 1}$ per questa $x$ (visualizza sulla 'matrice infinita', dove è facile vedere cosa succede; la verifica formale la lasciamo per esercizio ai più esigenti). $\square$

**Esercizio 6.9.** Dimostra:

(i) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \sim [0,1]$;

(ii) L'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ è equivalente a $[0,1]$.

(iii) se $B \sim \mathbb{R}$ ed $A_\beta \sim \mathbb{R}$ $\forall \beta \in B$ allora $\cup_{\beta\in B} A_\beta \sim \mathbb{R}$ (cf. la dimostrazione del teorema Cou2). [22]

## 7. $\succcurlyeq$

Qui affronteremo due problemi. Primo: Esistono insiemi 'arbitrariamente grandi' (nel senso di $\succcurlyeq$)? Sì (Cantor); e poi: $A \succcurlyeq B \,\&\, B \succcurlyeq A \Rightarrow A \sim B$? Sì (Bernstein–Schröder).

Definisci $\mathcal{P}(A) = \{S\colon S \subseteq A\}$, l'insieme dei sottoinsiemi di $A$. Esempi: $\mathcal{P}(\{a,b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$; $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$; $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) =$

---

[20] Per visualizzare incolonna le $(x_{ki})_{i\geq 1}$ in una 'matrice infinita'; la $(z_i)$ è definita elencando le linee in direzione sud–ovest nord–est: $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \ldots$.

[21] Primo blocco $z_1$, secondo $z_2, z_3$, terzo $z_4, z_5, z_6, \ldots$.

[22] Soluzioni: (i) Sappiamo dalla dim. del lemma 6.6 che l'insieme, diciamo $T$, delle sequenze in $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ che non terminano in zero è equivalente ad $R$ ($R \sim (0,1]$ è definito in quella dimostrazione); ma $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus T = \sum_{n\geq 1} \{(x_i)_{i\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\colon \min\{m\colon x_i = 0\ \forall i > m\} = n\} \equiv \sum_{n\geq 1} T_n$, che è numerabile per Cou2 perché $T_n$ è finito ($\#T_n = 2^{n-1}$); a questo punto la tesi segue dalla proposizione IuC.

(ii) Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ può identificarsi con la sequenza $(x_i) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ con $x_i = 1$ se e solo se $i \in A$.

(iii) La costruzione è quella della dimostrazione indicata, con in più la biiettività delle funzioni coinvolte.

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}; \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$; eccetera. Il teorema che segue dimostra che dato qualunque insieme $A$ ne esiste uno 'più grande'.

**Teorema (Cantor).** $\mathcal{P}(A) \succ A$.

*Dim.* Asserto vero per $A = \emptyset$, perché $\mathcal{P}(\emptyset) \neq \emptyset$ (cf. proposizione1.4). Sia allora $A \neq \emptyset$. Chiaramente $A \sim \{S \subseteq A \colon \#S = 1\} \subseteq \mathcal{P}(A)$, sicché $\mathcal{P}(A) \succcurlyeq A$; per dimostrare che $A \not\succcurlyeq \mathcal{P}(A)$ basta provare che non esiste una $\phi \colon A \to \mathcal{P}(A)$ suriettiva —perché se fosse $A \succcurlyeq \mathcal{P}(A)$ esisterebbe una biiezione $\psi \colon B \to \mathcal{P}(A)$ con $B \subseteq A$, che potremmo estendere a tutto $A$ ponendo per $x \in A \setminus B$ $\psi(x) = \{a\}$ con $a \in A$ qualunque, ottenendo una suriezione da $A$ a $\mathcal{P}(A)$. Supponi allora che esista tale $\phi$; poni $B = \{a \in A \colon a \notin \phi(a)\} \in \mathcal{P}(A)$; poiché $\phi$ è suriettiva esiste $\bar{a}$ tale che $B = \phi(\bar{a})$; per definizione $\bar{a} \notin \phi(\bar{a}) \Leftrightarrow \bar{a} \in B$; ma questo dice $\bar{a} \notin B \Leftrightarrow \bar{a} \in B$, cioè (*controlla*) $\bar{a} \notin B \,\&\, \bar{a} \in B$: impossibile. □

Passiamo al secondo problema di questa sezione.

**Lemma 7.1.** Se $A_2 \subseteq A_1 \subseteq A$ ed $A_2 \sim A$ allora anche $A_1 \sim A$.

*Dim.* Sia $\phi \colon A \to A_2$ una biiezione, e definisci ricorsivamente per $n \geq 3$ $A_n = \phi(A_{n-2})$; ponendo $A_0 = A$, per biiettività di $\phi$ abbiamo allora $A_n \sim A_{n-2}$ $\forall n \geq 2$, da cui

$$\bigl(A_n \setminus A_{n+1}\bigr) \sim \bigl(A_{n+2} \setminus A_{n+3}\bigr) \quad \forall n \geq 0 \tag{$*$}$$

$(\phi(A_n \setminus A_{n+1}) = A_{n+2} \setminus A_{n+3})$; inoltre, facile per induzione che $A_n \subseteq A_{n-1}$ $\forall n \geq 3$ $(A_3 = \phi(A_1) \subseteq \phi(A) = A_2$ perché $A_1 \subseteq A)$, sicché $A_n \subseteq A_{n-1}$ $\forall n \geq 1$; e dunque (a questo punto non ti dovrebbe essere difficile verificarlo)

$$A = \cap_{n\geq 0} A_n + \sum_{n\geq 0} (A_n \setminus A_{n+1}), \quad A_1 = \cap_{n\geq 0} A_n + \sum_{n\geq 1} (A_n \setminus A_{n+1}).$$

Osservando che

$$\sum_{n\geq 0} (A_n \setminus A_{n+1}) = \sum_{n\geq 0,\ n \text{ pari}} (A_n \setminus A_{n+1}) + \sum_{n\geq 1,\ n \text{ dispari}} (A_n \setminus A_{n+1}),$$

$$\sum_{n\geq 1} (A_n \setminus A_{n+1}) = \sum_{n\geq 0,\ n \text{ pari}} (A_{n+2} \setminus A_{n+3}) + \sum_{n\geq 1,\ n \text{ dispari}} (A_n \setminus A_{n+1}),$$

il risultato segue dalla $(*)$ di sopra (e la proposizione 1.5). □

**Teorema (Bernstein–Schröder).** $A \succcurlyeq B \;\&\; B \succcurlyeq A \;\Rightarrow\; A \sim B$.

*Dim.* Fissa biiezioni $\phi \colon B \to A_1 \subseteq A$ e $\psi \colon A \to B_1 \subseteq B$; componendole ottieni una biiezione $\phi\circ\psi \colon A \to A_2 \subseteq A_1$ $((\phi\circ\psi)(A) = \phi(B_1) \subseteq \phi(B) = A_1)$; usando il lemma 7.1 segue allora $A \sim A_1 \sim B$. □

Esercizio 7.2. Dimostra: $\mathcal{F} \equiv \{F \subseteq \mathbb{R}\colon F$ è finito $\} \sim \mathbb{R}$ (nota $\mathcal{F} = \sum_{n\geq 1}\{F \subseteq \mathbb{R}\colon \#F = n\} \equiv \sum_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$). [23]

Esercizio 7.3. Generalizza il lemma 6.4 ad unioni arbitrarie, dimostrando che: Se $A_n \sim [0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $\sum_{n\in\mathbb{N}} A_n \sim [0,1]$. [24]

## 8. $\mathbb{R}^{[0,1]}$

L'insieme di tutte le $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Vedremo qui che è più grande di $[0,1]$ (ovviamente nel senso di $\succ$); e che il sottoinsieme delle $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *continue* è invece ad esso equivalente.

Teorema 8.1. $\mathbb{R}^{[0,1]} \succ [0,1]$.

*Dim.* Per $\mathbb{R}^{[0,1]} \succcurlyeq [0,1]$ basta fissare una $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ e osservare che $\mathbb{R}^{[0,1]} \supseteq \{f+c\colon c \in [0,1]\} \sim [0,1]$. Per $[0,1] \not\succcurlyeq \mathbb{R}^{[0,1]}$ facciamo come per Cantor: dimostriamo per contraddizione che non esiste una suriezione da $[0,1]$ ad $\mathbb{R}^{[0,1]}$; sia allora $\phi\colon [0,1] \to \mathbb{R}^{[0,1]}$, e sia $\phi(t) = f_t$, $t \in [0,1]$; definisci $g \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ ponendo $g(x) = 1 + f_x(x)$, $x \in [0,1]$; se $\phi$ fosse suriettiva esisterebbe $t \in [0,1]$ tale che $g = f_t$, cioè tale che $1 + f_x(x) = f_t(x)$ $\forall x \in [0,1]$; ma questo è impossibile, perché per $x = t$ l'uguaglianza è falsa. $\square$

Sia $\mathcal{C}([0,1]) \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$ l'insieme delle funzioni *continue* da $[0,1]$ ad $\mathbb{R}$.

Teorema 8.2. $\mathcal{C}([0,1]) \sim [0,1]$.

*Dim.* Per Bernstein–Schröder basta provare $\succcurlyeq$ e $\preccurlyeq$. $\mathcal{C}([0,1]) \succcurlyeq [0,1]$ è come nel teorema precedente, eccetto che la $f$ fissata la sceglieremo continua; passiamo a $[0,1] \succcurlyeq \mathcal{C}([0,1])$. Sappiamo che $[0,1] \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (teorema 6.8); basterà allora dimostrare che $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \succcurlyeq \mathcal{C}([0,1])$. Poiché $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$ (corollario 4.6) e $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \mathbb{Q}$ è infinito (facile) e dunque numerabile (proposizione 4.1), possiamo enumerarlo, $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{r_n\}_{n\geq 1}$; definisci $\phi\colon \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ponendo $\phi(f) = \big(f(r_n)\big)_{n\geq 1}$; se $\phi(f) = \phi(g)$ è allora $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, sicché per continuità $f(x) = g(x)$ $\forall x \in [0,1]$ (*giusto*?), cioè $\phi$ è iniettiva; dunque $\phi$ è una biiezione fra $\mathcal{C}([0,1])$ e $\phi(\mathcal{C}([0,1])) \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — quello che cercavamo. $\square$

---

[23] Soluzione. Per ogni $n$, la $\phi\colon \mathcal{F}_n \to \mathbb{R}^n$ definita da $\phi(\{x_1,\dots,x_n\}) = (x_1,\dots,x_n)$ è chiaramente iniettiva, sicché $\mathcal{F}_n \preccurlyeq \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$ da cui $\mathcal{F}_n \preccurlyeq \mathbb{R}$; d'altra parte $\mathcal{F}_n \supseteq \big\{\{x,2,3,\dots,n\}\colon x \in \mathbb{R}\setminus\{2,3,\dots,n\}\big\} \sim \mathbb{R}\setminus\{2,3,\dots,n\} \sim \mathbb{R}$, da cui $\mathcal{F}_n \succcurlyeq \mathbb{R}$. Per Bernstein–Schröder è dunque $\mathcal{F}_n \sim \mathbb{R}$; a questo punto $\mathcal{F} = \sum_{n\geq 1}\mathcal{F}_n \sim \mathbb{R}$ dal lemma 6.4 pag.11.

[24] Soluzione. Sia di nuovo $a_n = 1 - 1/n$, $n \geq 1$ ed $A_n \sim [a_n, a_{n+1})$; Ponendo $A_0 = \emptyset$ e per $n \geq 1$ $B_n = A_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} A_k$ abbiamo $\cup_{n\geq 1} A_n = \sum_{n\geq 1} B_n$, unione disgiunta; e poiché $B_n \subseteq A_n$, $B_n \sim C_n$ per un $C_n \subseteq [a_n, a_{n+1})$; poiché anche i $C_n$ sono disgiunti è allora $\sum_{n\geq 1} B_n \sim \sum_{n\geq 1} C_n \subseteq [0,1]$, da cui $\cup_{n\geq 1} A_n \preccurlyeq [0,1]$. D'altra parte $\cup_{n\geq 1} A_n \supseteq A_1 \sim [0,1]$, sicché $\cup_{n\geq 1} A_n \succcurlyeq [0,1]$. Conclusione da Bernstein–Schröder.