Il Modello di Crescita di Solow

S. MODICA
30.IV.07

(Gli elementi fondamentali. Dettagli in:
Barro & Sala-i-Martin, Economic Growth, MIT Press)

• Funzione di produzione aggregata del prodotto (interno lordo!) Y tramite capitale K e lavoro L:

$$Y = F(K,L) \qquad (1)$$

con rendim. di scala costanti ($F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K,L)\ \forall \lambda > 0$).
Tutte le variabili sono funzioni del tempo: $Y = Y_t$, $K = K_t$, $L = L_t$.

• Evoluzione dell'economia: con I = investim. lordi e δ = frazione di ammortam. di K, abbiamo per def. $\dot{K} = I - \delta K$; dalla def di PIL lato impieghi $Y = C + I$ (Assumiamo $G = NX = 0$), e da lato risorse $Y = C + S$ $\therefore$ $I = S$, sicché $\dot{K} = S - \delta K$. Ora, $\boxed{\text{ASS. 1}}$ $C = (1-s)Y$. Da ciò

$$\dot{K} = sF(K,L) - \delta K. \qquad (2)$$

Per L assumiamo $\boxed{\text{ASS. 2}}$ $L_t = L_0 e^{nt}$ (tasso crescita di L costante $= n$). Dunque

$$\dot{L} = nL. \qquad (3)$$

• In termini pro capite. Dividiamo per L e usiamo le minuscole: $y = Y/L$, $k = K/L$. La (1) diventa

$$y = F(k,1) \equiv f(k).$$

Per $\dot{k}$: poiché $k/K = 1/L$, da $\dot{k}/k = \dot{K}/K - \dot{L}/L = sY/K - \delta - n$ otteniamo l'equazione fondamentale

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k. \qquad (4)$$

$\boxed{\text{ASS. 3}}$ f concava, $f' \xrightarrow[k\to 0]{} \infty$, $f' \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$.

• Dinamica del sistema. Dalla (4) (con ASS 3) otteniamo

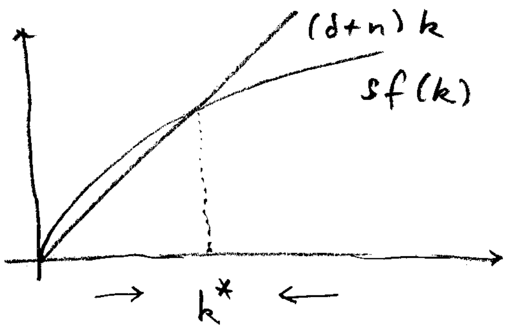


fig 1

$$\dot{k} \gtreqless 0 \iff sf(k) \gtreqless (\delta+n)k \iff k \lesseqgtr k^*. \qquad \text{DUNQUE:}$$

- $\forall k_0$, $k_t \xrightarrow[t \to \infty]{} k^*$ (Sol. di $sf(k) = (\delta+n)k$)
- Se $k_t = k^*$, $k_u = k^*$ & $y_u = f(k^*)$ $\forall u \geq t$.

PERCIÒ k^*, $y^* \equiv f(k^*)$ si chiama STATO STAZIONARIO (SS).

- RUOLO DEI PARAMETRI. Dati f e δ,

$$k^* = k^*(s,n), \quad y^* = y^*(s,n).$$

Chiaro dalla fig 1 che:

- $s \uparrow \Rightarrow k^*, y^* \uparrow$
- $n \uparrow \Rightarrow k^*, y^* \downarrow$.

- PREDIZIONE DEL MODELLO: L'economia va verso uno SS in cui il PIL pro-capite è COSTANTE. Poiché questo non si osserva per niente, COSA MANCA? PROGRESSO TECNOLOGICO. Lo introdurremo dopo.

- CONSUMO IN SS. Poiché $\dot{k} = i - (\delta+n)k$, in SS $i = (\delta+n)k$; dunque poiché $c = y - i$ ($c = C/L$, $i = I/L$), in SS è

$$c = f(k) - (\delta+n)k.$$

Def k^G è il val che risolve $\max_k f(k) - (\delta+n)k$.

Cioè, k^G (G per "Golden Rule") è il capitale pro-capite che massimizza il cons. pro-capite in SS. Domanda: $k^* = k^G$? Risposta, in generale NO. Perché k^* risolve $sf(k) = (\delta+n)k$, k^G risolve $f'(k) = \delta + n$. Es di $k^* \neq k^G$:

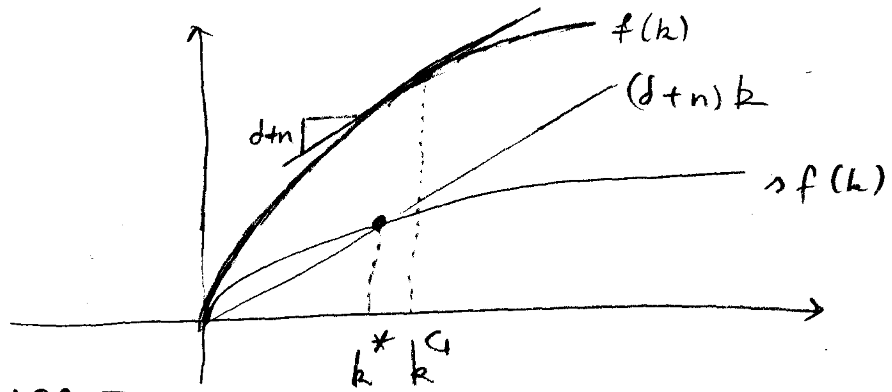


fig 2

- POLITICA ECONOMICA

Qui $k^* < k^G$ perché s è basso. Ricorda che $k^* = k^*(s)$. Il gov potrebbe cercare di aumentare c in SS incentivando il risparmio a t_0. Traiettorie dal vecchio al nuovo SS, con $s \uparrow s^G > s$, dove s^G è def. da: $s^G f(k^G) = (\delta+n)k^G$, cioè lo s t.c. $k^*(s^G) = k^G$:

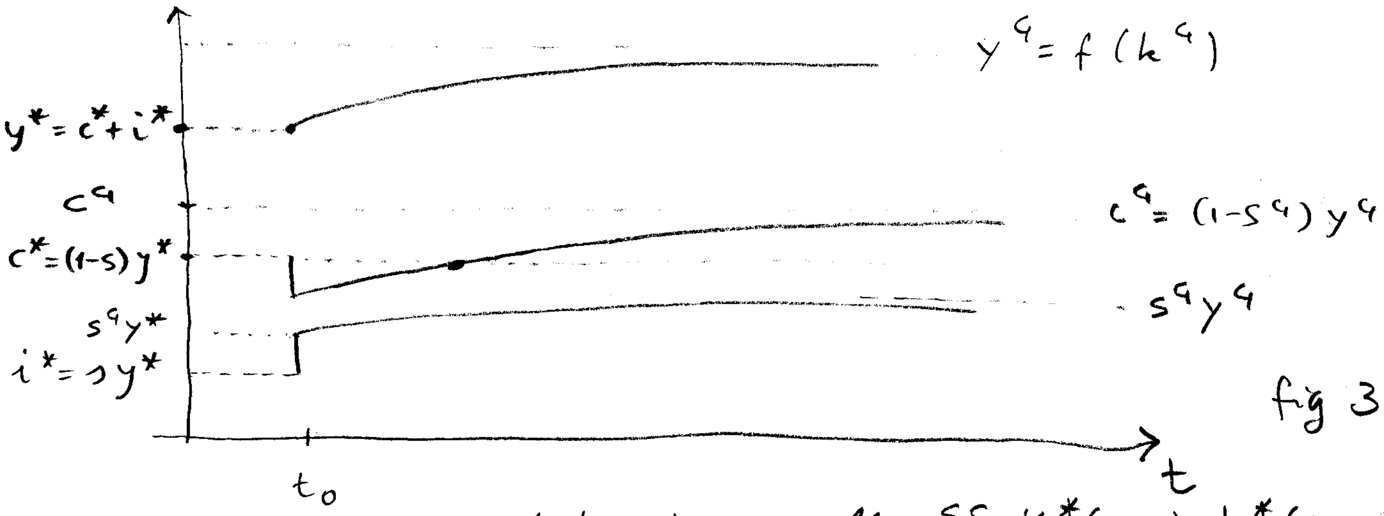
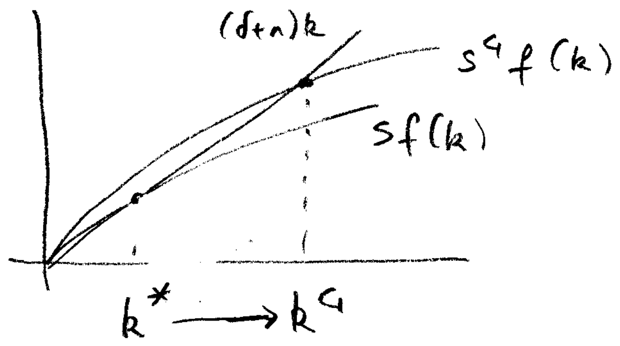


fig 3

<u>Transizione</u>: prima di t_0 siamo nello SS $y^*(s,n), k^*(s,n)$.
Poi, a t_0 s sale a s^q; i sale da sy^* ad $s^q y^*$ e c scende ad $(1-s^q)y^* < (1-s)y^*$.

Dopo t_0: $\dot{k} > 0$ ∴ $k \uparrow k^q$, graficamente:



Per $t < t_0$ $k_t = k^* = k^*(s)$

∴ $\dot{k}_t = sf(k^*) - (d+n)k^* = 0$

A t_0 s diventa s^q

∴ $\dot{k}_{t_0} = s^q f(k^*) - (d+n)k^* > 0$

& $\dot{y}_{t_0} = f'(k^*) \cdot \dot{k}_{t_0} > 0$.

Dunque k sale, da k^* al nuovo SS $k^*(s^q) = k^q$.

Così y sale da y^* ad $y^q = f(k^q)$ ($\dot{y}_t > 0\ \forall t > t_0$)

Il <u>consumo pro capite</u>, che era costante $= (1-s)y^*$ prima di t_0, <u>scende a t_0</u> ad $(1-s^q)y^*$; Poi, essendo $c_t = (1-s^q)y$, abbiamo $\dot{c}_t = (1-s^q)\dot{y}_t > 0\ \forall t > t_0$; e $c_t \to (1-s^q)y^q > c^*$ (perché $(1-s^q)y^q = f(k^q) - (d+n)k^q > f(k^*) - (d+n)k^* = c^*$).

<u>Problema</u> $c_t > c^*$ per t sufficientemente grande (vedi fig 3) $\boxed{\text{MA}}$ nel breve periodo — coincidente con l'orizzonte del GOV — $c_t < c^*$. Quindi la transizione è <u>politicamente</u> difficile.

<u>Esercizio</u> Supponi t.c. $k^* = k^*(s) > k^q$, con $k^q = k^*(s^q)$ per $s^q < s$ (DISEGNA!). Illustra che in questo caso per GOV non ci sono problemi.

• CONTO ECONOMICO, LATO RISORSE: DISTRIBUZ. DEL REDDITO.

Sappiamo che $Y =$ Salari + Interessi + Imposte Indirette + Profitti. Stiamo assumendo che Imposte $= 0$. Abbiamo poi: Salari $= wL$, Interessi $= rK$, con $w =$ salario ed $r =$ tasso interesse, entrambi per unità di tempo, in termini reali (livello prezzi $= 1$).

Vediamo il residuo Profitti.

PROP Se $w = F_L$ ed $r = F_K$ (prezzi fattori = produtt. marginali, come in concorrenza perfetta), Profitti $= 0$ – cioè $F = KF_K + LF_L$.

Dim Dim. che $F = KF_K + LF_L$. Differenziando risp. a t l'uguaglianza $tF(K,L) = F(tK,tL)$ si ottiene quanto voluto ponendo $t = 1$. □

Dunque le quote dei fattori sul reddito sono:

$$\text{Lavoro: } \frac{wL}{Y} = \frac{LF_L}{F} \qquad \text{Capitale: } \frac{rK}{Y} = \frac{KF_K}{F}.$$

In generale LF_L/F dipende da (K,L); ma storicamente questa quota è costante $\simeq 0.7$ (e l'altra 0.3). Per quale F si ottiene una distr. del reddito indipendente da K,L?

Risposta: PER LA COBB-DOUGLAS

$$F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha}.$$

In effetti è immediato che in questo caso

$$\frac{KF_K}{F} = \alpha, \qquad \frac{LF_L}{F} = 1-\alpha.$$

Esercizio Trova $k^*(s,n)$ e $y^*(s,n)$ (cfr p 2) per la Cobb-Douglas.

• PROGRESSO TECNOLOGICO

Introduciamo progr. tecnol. T nella (1) come segue:

$$Y = F(K, TL), \qquad (1T)$$

così L unità di lavoro diventano TL se il liv. tecnologico è T.

$\boxed{\text{ASS 4}}$ $T_t = T_0 e^{gt}$, così $\dot{T}/T = g$. Ora esprimiamo tutto non in unità di lavoro L ma in 'unità di efficienza' TL:

$$\tilde{y} = Y/TL, \quad \tilde{k} = K/TL.$$

La (1T) diventa $\tilde{y} = F(\tilde{k}, 1) \equiv f(\tilde{k})$; la (2) vale con TL al posto di L, e da questa ne viene

$$\dot{\tilde{k}} = s f(\tilde{k}) - (\delta + n + g)\tilde{k}, \qquad (4T)$$

formalmente analoga alla (4). Per l'analisi della (4T), vale la fig 1 con $\tilde{k}$ al posto di k e $(\delta+n+g)$ al posto di $(\delta+n)$.
E le conclusioni sono analoghe:

- $\forall \tilde{k}_0, \tilde{k}_t \longrightarrow k^*$ (sol di $s f(\tilde{k}) = (\delta+n+g)\tilde{k}$)
- Se $\tilde{k}_t = \tilde{k}^*$, $\tilde{k}_u = \tilde{k}_t$ & $\tilde{y}_u = f(\tilde{k}^*)$ $\forall u \geq t$.

Di nuovo, $\tilde{k}^*, \tilde{y}^*$ è lo SS del sistema. Ma la <u>PREDIZIONE</u> del modello su $y = Y/L$ (PIL procapite) è sostanzialmente diversa. Perché $\dot{\tilde{y}} = 0$ (SS) vuol dire:

$$\dot{y}/y = g \quad \text{in Stato Stazionario}$$

(perché $y = \tilde{y}T \therefore \dot{y}/y = \dot{\tilde{y}}/\tilde{y} + \dot{T}/T = 0 + g$ in SS). Dunque in SS, il <u>PIL pro capite</u> <u>cresce al tasso del progr. tecnologico</u>.

- <u>Esercizio</u> Definisci $\tilde{k}^G$, e modifica fig 2 per dim. che in gen. $\tilde{k}^G \neq \tilde{k}^* = \tilde{k}^*(s)$ con s arbitrario (Ovviamente si parte dal definire $\tilde{c}$). Le conclusioni di POL·ECON sono le stesse.

- <u>Applicazione</u> (Mankiw, Macroeconomia).
  Domanda: $\tilde{k} = \tilde{k}^G$ in USA?
  (Ricorda che $\tilde{k}^G$ massimizza $\tilde{c}$ in SS). Poiché $\tilde{k}^G$ è def. da $f'(\tilde{k}) = \delta+n+g$, ed f è concava, avremo

$$\tilde{k} \lesseqgtr \tilde{k}^G \iff f'(\tilde{k}) \gtreqless \delta+n+g.$$

<u>Lemma</u> $f'(\tilde{k}) = F_k(k, TL)$ (Prod. Marg. Capitale, PMK).

<u>Dim</u> $f(\tilde{k}) = \frac{1}{TL} F(TL\tilde{k}, TL) \therefore f'(\tilde{k}) = \frac{1}{TL} TL F_k(K, TL)$. □

<u>DATI</u> <u>PROBLEMA</u>: Crescita PIL 3%; Ammortamenti 10% PIL; Redditi da Capitale 30% PIL; $K = 2.5\,Y$. CIOE':
$n+g = 0.03$; $\delta K = 0.1\,Y$; $K \cdot PMK = 0.3\,Y$; $K = 2.5\,Y$.
Da questo ricaviamo: $\delta = 0.1/2.5 = 0.04$ e $PMK = 0.3/2.5 = 0.12$
Da cui $PMK > n+g+\delta \therefore \tilde{k} < \tilde{k}^G$: Gli americani risparmiano troppo poco (lo possiamo dire senza sapere s).

- <u>NEXT</u> <u>STEP</u>: da dove viene $\dot{T}/T$?

END