

Università degli Studi di Pisa  
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Fisica

Tesi di Laurea

# CAMPI CARICHI GAUGE INVARIANTI IN ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

Candidato

Salvatore Micciché

Relatore

Prof. Emilio d'Emilio

Controrelatori

Prof. Giovanni Morchio

Prof. Giampiero Paffuti

anno accademico 1993-1994

# TESINE

1. Solitoni in Relatività Generale accoppiata ad una Teoria di Yang Mills  
Prof. M. MAGGIORE
2. Metodo di Lanczos per la determinazione di stati eccitati in un sistema quantistico  
Prof. G. GROSSO
3. Rumore Termico nei sospensori degli specchi di Virgo  
Prof. F. FIDECARO

# Indice

<b>1</b>	<b>Alcuni problemi connessi con le Teorie di Gauge</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Campi Carichi Gauge Invarianti: il caso classico</b>	<b>7</b>
2.1	Definizioni . . . . .	7
2.2	Costruzione classica dell' operatore $V$ . . . . .	8
2.2.1	Gauge Invarianza . . . . .	8
2.2.2	Unitarietà . . . . .	12
2.2.3	Identità iconali ed Elettrodinamica . . . . .	14
2.3	Campi Lorentz Covarianti . . . . .	15
2.4	Conclusioni . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Campi Carichi Gauge Invarianti: il caso della QED</b>	<b>18</b>
3.1	Definizioni . . . . .	18
3.2	Regole di Ostendorf-Steinmann . . . . .	20
3.3	I campi carichi gauge invarianti in QED . . . . .	21
3.4	Vertici extra . . . . .	27
3.5	La funzione di Wigthman 1 loop . . . . .	28
3.5.1	Espansione diagrammatica . . . . .	28
3.5.2	Rinormalizzazione Moltiplicativa . . . . .	28
3.5.3	Calcolo di $W_{2,R}^{1-loop}$ . . . . .	29
3.5.4	Gauge Invarianza . . . . .	30
3.6	Campi carichi gauge invarianti e gauge assiale . . . . .	32
3.7	Conclusioni . . . . .	33
3.7.1	Regole di Ostendorf-Steinmann e di Cutkosky-Veltman . . . . .	33
3.7.2	Prescrizione generica . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Calcolo dell' ordine 2-loop</b>	<b>39</b>
4.1	$W_2^{2-loop}$ : Espansione Diagrammatica . . . . .	39
4.2	Rinormalizzazione Moltiplicativa . . . . .	49
4.3	Gauge Invarianza . . . . .	50
4.4	Il problema delle divergenze infrarosse . . . . .	57
4.4.1	Classificazione delle divergenze . . . . .	57
4.4.2	Fattorizzazione . . . . .	60

4.4.3	Meccanismo di cancellazione dell' infrarosso . . . . .	62
4.5	Calcolo analitico dell' ordine 2-loop . . . . .	66
4.5.1	Meccanismo di cancellazione delle parti immaginarie . . . . .	67
4.5.2	Verifica analitica dell' Ultravioletto . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Questioni aperte</b>	<b>69</b>
<b>A</b>		<b>73</b>
<b>B</b>		<b>74</b>
<b>C</b>		<b>78</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>80</b>

# Capitolo 1

## Alcuni problemi connessi con le Teorie di Gauge

Le questioni che intendiamo discutere in questa tesi riguardano due aspetti delle teorie di gauge, specializzati al caso della Elettrodinamica Quantistica (*QED*): il primo riguarda la possibilità di avere equazioni di Maxwell deboli (come è ben noto avvenire nel settore del vuoto, con carica elettrica nulla) anche nei settori carichi di *QED*. Ciò equivale ad avere una formulazione in cui solo due gradi di libertà del fotone entrano a determinare la dinamica del sistema "particelle cariche - campo elettromagnetico" e fa immediatamente intravedere un problema quanto alla possibilità di mantenere la simmetria relativistica (boost di Lorentz in particolare) manifesta.

Il secondo problema, diretta conseguenza del primo, consiste nel dare indicazioni positive circa la possibilità di estendere ai settori carichi di *QED* il formalismo di riduzione di Lehman-Symanzik-Zimmermann (*LSZ*) [1], che come è noto, non è direttamente applicabile agli usuali campi fermionici di *QED*.

Una delle richieste cui deve soddisfare una teoria di campo quantistica è che il suo comportamento a grandi distanze, ovvero a piccoli impulsi, riproduca il caso classico [2]. In teorie di campo con mass-gap ciò è verificabile a partire dal fatto che i propagatori in rappresentazione degli impulsi hanno un polo alla massa fisica della particella e dal fatto che la matrice di scattering, attraverso il formalismo di riduzione, è esprimibile come il residuo on shell dei poli della funzione di Green.

In teorie di campo senza mass-gap, ed in particolare nei settori carichi delle teorie di gauge, il comportamento near-mass-shell delle funzioni di Green è, anche in semplice teoria perturbativa ad ordini finiti, drasticamente diverso da quello delle funzioni di Green albero: la singolarità nell' impulso di ogni gamba esterna non è più un semplice polo. Ad esempio in *QED* con gauge fixing lineare e covariante  $\xi$  il propagatore vestito dell' elettrone è, per  $p^2 \simeq m^2$  [4]:

$$i \mathcal{S}_F(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left( 1 + d(\xi) \log\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \frac{1}{2} d(\xi)^2 \log^2\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) + \dots \right)$$

$$i \mathcal{S}_F(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \left( 1 - \frac{p^2}{m^2} \right)^{d(\xi)} \quad (1.1a)$$

$$d(\xi) = \frac{\alpha}{2\pi} \left( 3 - \frac{1}{\xi} \right) \quad (1.1b)$$

Questa formula da sola manifesta due problemi cruciali dei settori carichi:

1. Esplicita gauge dipendenza.
2. Instabilità della teoria perturbativa a bassi impulsi.

Nel caso di *QED* la teoria perturbativa è suscettibile di risommazione con il risultato che, a parte il taglio per  $p^2 > m^2$  che ci si aspetta per ragioni di unitarietà, il limite:

$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2} (\not{p} - m) \mathcal{S}_F(p) \quad (1.2)$$

non è ben definito. In questo caso particolare il fatto che tale limite dia come risultato 1, 0 oppure  $\infty$  dipende dal valore attribuito a  $\xi$ . D' altra parte, la questione evidenziata al punto 1 fa sì che nessun significato fisico *debba* essere attribuito a questo fatto.

L' occorrenza di questa situazione è evidentemente dovuta al fatto che ci si è limitati, sinora, a studiare i soli campi locali che appaiono nella lagrangiana di *QED*.

Le alternative possibili sono messe a fuoco in [5] dove si mostra come la validità delle equazioni di Maxwell e la località dei campi carichi, relativamente alla corrente elettrica, siano incompatibili.

La prima alternativa è quella di limitarsi allo studio del settore di vuoto, rinunciando alla costruzione di campi gauge invarianti carichi e mantenendo, tuttavia, la località.

In [6] viene dimostrata una "Charge Superselection Rule" in base alla quale ogni osservabile quasilocale commuta con  $e^{i\alpha Q}$ , dove  $Q$  è la carica elettrica. Tanto la località quanto la validità delle equazioni di Maxwell sono determinanti nella dimostrazione di questa regola di superselezione. Altri lavori che si inseriscono su questa linea di ricerca riprendono e generalizzano l' idea delle regole di superselezione, traendone indicazioni sulla struttura degli stati fisici e su come essi debbano essere costruiti per eliminare il problema delle divergenze infrarosse [7]. Infine, in [8], viene proposta una formulazione di *QED* costruita a partire dalla regole di superselezione e da una nuova definizione di stati carichi: viene abbandonata la costruzione degli stati a partire dallo spazio di Fock ma viene persa l' invarianza sotto boost di Lorentz.

Questa linea di ricerca è stata perseguita anche in altri lavori. Noi, al contrario, ci rifaremo alla seconda delle alternative indicate in [5] seguendo, in questo, la proposta formulata da Dirac [9] agli inizi degli anni '50.

Egli propose una formulazione consistente nell' abbandono della richiesta di località dei campi: propose di considerare, al posto dei campi usuali  $\psi$ , dei campi delocalizzati:

$$\Psi = e^{-ig \int d^4w f_\mu(x-w) A^\mu(w)} \psi(x) \quad (1.3)$$

che fossero globalmente carichi ed anche gauge invarianti (la richiesta di gauge invarianza determina la forma di  $f$ , come meglio vedremo nel capitolo successivo). Dirac cercava di formulare una teoria autoconsistente in cui fossero assegnate per i campi  $\Psi$  ed  $\bar{\Psi}$  delle equazioni del moto ed di cui fosse possibile una quantizzazione che coinvolgesse soltanto i gradi di libertà fisici del fotone. Vedremo in seguito, ma il fatto era già noto, come questo programma sia in effetti possibile, ma a patto di rinunciare alla simmetria di Lorentz.

In questa tesi si propone una formulazione, di cui la (1.3) è solo il punto di partenza, in cui, però, cercheremo di ripristinare la Lorentz covarianza [10].

Mostreremo come questo ci permetterà automaticamente di dare indicazioni interessanti circa il problema del comportamento near-mass-shell di cui si è parlato sopra e vedremo, d' altra parte, quali sono gli svantaggi del nostro approccio.

## Schema della tesi

- Nel capitolo 2 daremo la nostra definizione di campi composti, carichi, gauge invarianti  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$  nell' ambito della Elettrodinamica classica. Si vedrà, in particolare, come  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$  non sono Lorentz covarianti e discuteremo quale ulteriore passo permetta di costruire, a partire da essi, dei campi carichi gauge invarianti e simultaneamente covarianti sotto boost di Lorentz. Tali campi verranno indicati con  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .
- Nel capitolo 3 daremo la versione quantistica dei campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$  definiti classicamente. Vedremo come la loro struttura ci impedisce di studiare direttamente le relative funzioni di Green mentre sarà naturale studiarne le funzioni di Wightman. A questo scopo ci serviremo di regole diagrammatiche la cui formulazione è relativamente recente: ad esse ci riferiremo, in seguito, con l' espressione di "Regole di Ostendorf-Steinmann" [11, 12, 13].

Studieremo, in particolare l' ordine 1-loop della funzione di Wightman:

$$W_2(x - y) = \langle 0 | \Upsilon(x) \bar{\Upsilon}(y) | 0 \rangle \quad (1.4)$$

evidenziandone le seguenti proprietà:

1.  $W_2(x - y)$  presenta divergenze ultraviolette che sono eliminabili con una rinormalizzazione moltiplicativa dei campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .
2.  $W_2(x - y)$  è gauge invariante.
3.  $W_2(x - y)$  è reale.
4. Ognuno dei grafici che contribuiscono a  $W_2(x - y)$  non presenta divergenze infrarosse.
5. Si ha:

$$\hat{W}_2(p) = (2\pi) \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) - \alpha \theta(p_0) \theta(p^2 - m^2) \frac{p^2 - m^2}{2p^4} \not{p} + \dots$$

pertanto a  $p^2 \simeq m^2$  la singolarità dell' ordine albero non è modificata.

- Nel capitolo 4 considereremo l' ordine 2-loop di  $W_2(x - y)$ . In base alle Regole di Ostendorf-Steinmann essa è definita come somma di grafici raggruppabili in tre classi. Mutuando una terminologia propria delle regole di Cutkosky-Veltman [15], tali classi di grafici possono essere indicate come: tagli a tre corpi, tagli a due corpi, doppi tagli a due corpi.

Verificheremo le principali proprietà strutturali di  $W_2^{2-loop}$ :

1. Rinormalizzazione. Anche a quest' ordine la funzione  $W_2^{2-loop}$  presenta divergenze ultraviolette che sono eliminabili rinormalizzando moltiplicativamente i campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .
2. Gauge Invarianza.  $W_2^{2-loop}$  non dipende da  $\xi$ .
3. Realtà. Mostriamo l' esistenza di un meccanismo di cancellazione delle parti immaginarie che coinvolge i tagli a due corpi ed i doppi tagli a due corpi. Questo sarà fatto calcolando analiticamente i grafici con tagli a due corpi e con doppi tagli a due corpi.
4. Divergenze infrarosse. Vedremo come esistano grafici potenzialmente divergenti infrarossi. A questo proposito mostreremo due cose:
  - le divergenze possono essere fattorizzate grafico a grafico;
  - esiste un meccanismo, che generalizza quello di [17] alle  $T$ -sector-functions , per cui nella somma di tutti i grafici, compresi quelli dovuti ai controtermini, tali divergenze si cancellano identicamente.
5. Non daremo indicazioni circa il comportamento near-mass-shell di  $W_2^{2-loop}$  perchè questo richiederebbe il calcolo analitico anche dei tagli a tre corpi e ciò non è stato fatto.

Avremo modo, in questo contesto, di porre in evidenza il ruolo dei grafici one-particle-reducible ( $OPR$ ), chiarendo perchè debbano essere introdotti.

- Nel capitolo 5 daremo una rivista delle questioni lasciate aperte dalla nostra costruzione e per alcune di esse indicheremo una possibile via d' uscita.



# Capitolo 2

## Campi Carichi Gauge Invarianti: il caso classico

Nelle sezioni (2.1), (2.2) e (2.3) seguiremo [19].

### 2.1 Definizioni

Sia  $G$  un gruppo di Gauge. Sia  $\mathcal{G}$  l' Algebra corrispondente con generatori  $T_a$ ,  $a = 1, \dots, \dim \mathcal{G}$ . Sia  $A^\mu = A_a^\mu \tau^a$  dove i  $\tau_a$  rappresentano i generatori  $T_a$  nella rappresentazione dei fermioni.

La nostra definizione di campi carichi gauge invarianti è [10, 20]:

$$\Psi(x, f) = V(x, f) \psi(x) \quad (2.1a)$$

$$\bar{\Psi}(x, f) = \bar{\psi}(x) V^+(x, f) \quad (2.1b)$$

$$V(x, f) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-ig)^k}{k!} \int d^4 w_1 \dots d^4 w_k f_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(x - w_1, \dots, x - w_k) \times \\ \times A_{\mu_1}(w_1) \dots A_{\mu_k}(w_k) \quad (2.2)$$

dove  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e  $A_\mu$  sono rispettivamente i campi di spin 1/2 massivi e di spin 1 a massa nulla presenti nell' azione della Cromodinamica Classica [21].

Il fatto che i campi composti definiti dalle (2.1) abbiano le stesse parentesi di Poisson di  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  con le cariche di Noether, associate all' invarianza dell' azione sotto trasformazioni di gauge globali, segue dalle parentesi di Poisson canoniche.

Le funzioni  $f_k$  saranno determinate imponendo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

1.  $\Psi(x, f)$  deve risultare gauge-invariante.
2. L' operatore  $V(x, f)$  deve risultare unitario.

Notiamo, inoltre, che le convoluzioni multiple della (2.2) preservano la covarianza per traslazioni dei campi  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$ .

## 2.2 Costruzione classica dell' operatore V

### 2.2.1 Gauge Invarianza

Sia  $U(x) \in G$ .  $A^\mu$  trasforma come:

$$A^\mu \mapsto A_U^\mu = U(x)A^\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \quad (2.3)$$

La richiesta che  $\Psi(x, f)$  e  $\bar{\Psi}(x, f)$  siano gauge invarianti impone la seguente relazione per  $V(x, f)$ :

$$U(x)V(x, A^\mu) = V(x, A_U^\mu) \quad (2.4)$$

Questa equazione è verificata quando le  $f_k$  soddisfano:

$$\partial_{\rho_\alpha}^\alpha f_k^\rho(\xi) = [ \delta^4(\xi_\alpha - \xi_{\alpha-1}) - \delta^4(\xi_\alpha - \xi_{\alpha+1}) ] f_{k-1}^{\rho \setminus \alpha}(\xi \setminus \alpha) \quad (2.5)$$

con le seguenti notazioni:

1.  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$ ;
2.  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ ;
3.  $\xi \setminus \alpha$  significa che bisogna omettere il termine che porta l'indice  $\alpha$ ;
4.  $\xi_0 = 0$ ;
5.  $f_0 = 1$ ;

L' insieme delle equazioni definite dalla (2.5) verrà da noi indicato con l' espressione: equazioni di Steinmann.

In trasformata di Fourier, tenendo conto delle notazioni prima indicate, le equazioni di Steinmann diventano:

$$p_{\rho_1}^1 \hat{f}_k^{\rho_1 \dots \rho_k}(p_1 \dots p_k) = i [ \hat{f}_{k-1}^{\rho_2 \dots \rho_k}(p_2 \dots p_k) - \hat{f}_{k-1}^{\rho_2 \dots \rho_k}(p_1 + p_2, p_3, \dots p_k) ] \quad (2.6a)$$

$$p_{\rho_\alpha}^\alpha \hat{f}_k^{\rho_1 \dots \rho_k}(\dots, p_\alpha, \dots) = i [ \hat{f}_{k-1}^{\rho_1 \dots \rho_{\alpha-1} \rho_{\alpha+1}}(\dots, p_{\alpha-1} + p_\alpha, p_\alpha, \dots) - \hat{f}_{k-1}^{\rho_2 \dots \rho_k}(\dots, p_\alpha, p_\alpha + p_{\alpha+1}, \dots) ] \quad (2.6b)$$

$$p_{\rho_k}^k \hat{f}_k^{\rho_1 \dots \rho_k}(p_1 \dots p_k) = i \hat{f}_{k-1}^{\rho_1 \dots \rho_{k-1}}(p_1, \dots, p_{k-2}, p_{k-1} + p_k) \quad (2.6c)$$

Introducendo ulteriormente:

$$\pi_k = n \cdot p_k \quad \hat{f}_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(\pi_1, \dots, \pi_k) = i n_{\mu_1} \dots i n_{\mu_k} \Phi_k(\pi_1, \dots, \pi_k) \quad (2.7)$$

le nostre equazioni assumono una forma più semplice:

$$\pi_1 \Phi_k(\pi_1, \dots, \pi_k) = \Phi_{k-1}(\pi_2, \dots, \pi_k) - \Phi_{k-1}(\pi_1, \pi_2 + \pi_3, \dots, \pi_k) \quad (2.8a)$$

$$\begin{aligned} \pi_\alpha \Phi_k(\pi_1, \dots, \pi_k) = & \Phi_{k-1}(\dots, \pi_{\alpha-1} + \pi_\alpha, \pi_{\alpha+1}, \dots) - \\ & - \Phi_{k-1}(\dots, \pi_{\alpha-1}, \pi_\alpha + \pi_{\alpha+1}, \dots) \end{aligned} \quad (2.8b)$$

$$\pi_k \Phi_k(\pi_1, \dots, \pi_k) = \Phi_{k-1}(\pi_1, \dots, \pi_{k-2}, \pi_{k-1} + \pi_k) \quad (2.8c)$$

Una ulteriore semplificazione delle nostre equazioni si ottiene introducendo le variabili:

$$\tau_r = \sum_{j=r}^k \pi_j \quad \Phi_k(\pi_1, \dots, \pi_k) = F_k(\tau_1, \dots, \tau_k) \quad (2.9)$$

Sommando le precedenti equazioni dalla  $k$ -esima alla  $n$ -esima ottengo:

$$\tau_i F_k(\tau_1, \dots, \tau_k) = F_{k-1}(\dots, \tau_{i-1}, \tau_{i+1}, \dots) \quad i = 1 \dots k \quad (2.10)$$

Affermiamo che la soluzione di queste equazioni è:

$$\begin{aligned} F_k(\tau_1 \dots \tau_k; a_1 \dots a_k) = & f(\tau_1) \dots f(\tau_k) + \\ & + a_1 \left( h(\tau_1) \dots f(\tau_k) + \dots + f(\tau_1) \dots h(\tau_k) \right) + \\ & + a_2 \left( h(\tau_1) h(\tau_2) f(\tau_3) \dots f(\tau_k) + \dots + \right. \\ & \quad h(\tau_1) f(\tau_2) \dots h(\tau_k) + \\ & \quad f(\tau_1) h(\tau_2) h(\tau_3) \dots f(\tau_k) + \dots + \\ & \quad \left. f(\tau_1) h(\tau_2) f(\tau_3) \dots h(\tau_k) + \dots \right) + \\ & + \dots + \\ & + a_k \left( h(\tau_1) \dots h(\tau_k) \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

dove gli  $a_k$  sono coefficienti complessi e le funzioni  $f$  ed  $h$  sono definite come:

$$f(\tau) = \frac{1}{\tau + i\epsilon} \quad (2.12a)$$

$$h(\tau) = 2 \pi i \delta(\tau) \quad (2.12b)$$

Si noti che l'addendo che ha come coefficiente  $a_k$  è ottenuto considerando tutti i modi in cui è possibile sostituire nella stringa  $f(\tau_1) \dots f(\tau_k)$   $k$  funzioni  $h$  al posto di  $k$  funzioni  $f$ : pertanto esso sarà composto da  $C_{k,r}$  termini. Ci limitiamo a verificare l'affermazione fatta soltanto fino all'ordine 3.

### Ordine 1

Per  $k = 1$  l'equazione di Steinmann è:

$$\tau_1 F_1(\tau_1; a_1) = 1 \quad (2.13)$$

ed ha come soluzione:

$$F_1(\tau_1; a_1) = \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} + 2\pi i a_1 \delta(\tau_1) \quad (2.14)$$

## Ordine 2

Le due equazioni di Steinmann sono:

$$\tau_1 F_2(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) = F_1(\tau_2; a_1) \quad (2.15a)$$

$$\tau_2 F_2(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) = F_1(\tau_1; a_1) \quad (2.15b)$$

Risolvendo la prima equazione ottengo:

$$F_2(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) = \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} F_1(\tau_2; a_1) + A(\tau_2) \delta(\tau_1)$$

dove  $A(\tau_2)$  è una generica funzione.

Imponendo che questa soluzione soddisfi anche alla seconda delle equazioni di Steinmann si ottiene:

$$A(\tau_2) = 2 i \pi a_1 \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} + B \delta(\tau_2)$$

Ridefinendo  $B$  si ha la soluzione finale:

$$\begin{aligned} F_2(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) &= \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} + \\ &+ 2 i \pi a_1 \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} \delta(\tau_1) + \\ &+ 2 i \pi a_1 \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \delta(\tau_2) + \\ &+ (2 i \pi)^2 a_2 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \end{aligned} \quad (2.16)$$

## Ordine 3

Le equazioni di Steinmann al terzo ordine sono:

$$\tau_1 F_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3; a_1, a_2, a_3) = F_2(\tau_2, \tau_3; a_1, a_2) \quad (2.17a)$$

$$\tau_2 F_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3; a_1, a_2, a_3) = F_2(\tau_1, \tau_3; a_1, a_2) \quad (2.17b)$$

$$\tau_3 F_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3; a_1, a_2, a_3) = F_2(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) \quad (2.17c)$$

La soluzione più generale della prima equazione è data da:

$$F_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} F_2(\tau_2, \tau_3; a_1, a_2) + A(\tau_2, \tau_3) \delta(\tau_1)$$

dove  $A(\tau_2, \tau_3)$  è una generica funzione.

Imponendo che questa soluzione risolva anche la seconda e la terza equazione, si ottengono due ulteriori equazioni per  $A(\tau_2, \tau_3)$ :

$$\begin{aligned}\tau_2 A(\tau_2, \tau_3) &= 2 \pi i a_1 F_1\left(\tau_3; \frac{a_2}{a_1}\right) \\ \tau_3 A(\tau_2, \tau_3) &= 2 \pi i a_1 F_1\left(\tau_2; \frac{a_2}{a_1}\right)\end{aligned}$$

Risolvendo queste equazioni, con gli stessi procedimenti usati per la soluzione al secondo ordine, si ha:

$$\begin{aligned}F_3(\tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_3 + i\epsilon} + \\ &+ 2 \pi i a_1 \left( \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} \delta(\tau_3) + \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_3 + i\epsilon} \delta(\tau_2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} \frac{1}{\tau_3 + i\epsilon} \delta(\tau_1) \right) + \\ &+ (2 \pi i)^2 a_2 \left( \frac{1}{\tau_1 + i\epsilon} \delta(\tau_2) \delta(\tau_3) + \frac{1}{\tau_2 + i\epsilon} \delta(\tau_1) \delta(\tau_3) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\tau_3 + i\epsilon} \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \right) + \\ &+ (2 \pi i)^3 a_3 \delta(\tau_1) \delta(\tau_2) \delta(\tau_3)\end{aligned}\tag{2.18}$$

La ragione per cui non diamo una prova sistematica del fatto che la (2.11) è la più generale soluzione delle equazioni di Steinmann è che, per i calcoli perturbativi dei capitoli 3 e 4, in cui viene coinvolto al più l'ordine 2-loop, la conoscenza di  $f_2$  è sufficiente.

Abbiamo ottenuto una soluzione in cui ad ogni ordine di espansione la  $F_k$  presenta un parametro libero  $a_k$  indipendente dagli altri  $a_1 \dots a_{k-1}$ . Tuttavia ad ogni ordine perturbativo esiste un solo vettore  $n_\mu$  che entra nella definizione di  $F_k$ .

A priori potevamo aspettarci che, all'ordine  $k$ , vi fossero sia un parametro  $a_k$  che un vettore  $n_\mu^{(k)}$  indipendenti: è un preciso risultato della invarianza di gauge quello di avere costretto la funzione  $F_k$  a dipendere da un solo vettore  $n_\mu$  una volta che sia stata fissata la forma di  $F_1$  come nella (2.14).

Esplicitiamo questa dipendenza introducendo una nuova notazione per indicare  $f_k$ ,  $V$  e  $\Psi$ :

$$V(x, f) \longrightarrow V(x; n, [a])\tag{2.19a}$$

$$\Psi(x, f) \longrightarrow \Psi(x; n, [a])\tag{2.19b}$$

$$f_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(x) \longrightarrow f_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(x; n, [a])\tag{2.19c}$$

dove il simbolo  $[a]$  indica l'insieme dei parametri che definiscono le  $f_k$ .

Un commento va fatto circa la (2.11). Le soluzioni:

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^{+ \mu_1 \dots \mu_k}(p_1, \dots, p_k) &\stackrel{def}{=} \hat{f}_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(p_1, \dots, p_k; n, [0]) = \\ &= \frac{i n_{\mu_1}}{n(p_1 + p_2 + \dots + p_k) + i\epsilon} \frac{i n_{\mu_2}}{n(p_2 + \dots + p_k) + i\epsilon} \dots \times \\ &\quad \times \dots \frac{i n_{\mu_k}}{np_k + i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_k^{- \mu_1 \dots \mu_k}(p_1, \dots, p_k) &\stackrel{def}{=} \hat{f}_k^{\mu_1 \dots \mu_k}(p_1, \dots, p_k; n, [1]) = \\ &= \frac{i n_{\mu_1}}{n(p_1 + p_2 + \dots + p_k) - i\epsilon} \frac{i n_{\mu_2}}{n(p_2 + \dots + p_k) - i\epsilon} \dots \times \\ &\quad \times \dots \frac{i n_{\mu_k}}{np_k - i\epsilon} \end{aligned} \quad (2.20b)$$

sono sicuramente soluzioni della equazione di Steinmann e sono comprese nella soluzione generale da noi data ( [0] e [1] indicano che i coefficienti  $a_k$  vanno presi tutti eguali a 0 oppure 1 rispettivamente ).

Introducendo la rappresentazione:

$$\frac{1}{a \pm i\epsilon} = \mp i \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \theta(\pm\alpha) e^{i\alpha(a \pm i\epsilon)} \quad (2.21)$$

gli operatori  $V$  corrispondenti alle (2.20) assumono la forma:

$$V_+ \stackrel{def}{=} V(x, n, [0]) = \mathcal{P}_+ e^{-ig \int_0^{+\infty} d\alpha n \cdot A(x - n\alpha)} \quad (2.22a)$$

$$V_- \stackrel{def}{=} V(x, n, [1]) = \mathcal{P}_- e^{-ig \int_{-\infty}^0 d\alpha n \cdot A(x + n\alpha)} \quad (2.22b)$$

L' utilità delle (2.22) è quella di mostrare come gli operatori  $V$  che stiamo proponendo siano, almeno nei casi  $[a] = [0, 1]$  nient' altro che le usuali stringhe rettilinee alla Mandelstam [23], con l' opzione di  $\mathcal{P}_+$  oppure  $\mathcal{P}_-$ -ordinamento.

Il nostro formalismo:

- fornisce una rappresentazione alternativa a quella delle stringhe basata su integrazioni 4-dimensionali nello spazio di Minkowski anzichè su cammini 1-dimensionali. Questo sarà di notevole utilità nel formulare delle regole diagrammatiche semplici.
- permette, evidentemente, di costruire stringhe in cui al variare di  $[a]$  si possa interpolare tra le due prescrizioni  $\mathcal{P}_+$  e  $\mathcal{P}_-$

## 2.2.2 Unitarietà

La condizione di unitarietà è espressa da:

$$V V^+ = 1 \quad V^+ V = 1 \quad (2.23)$$

È facile vedere che per il nostro operatore  $V(x; n, [a])$  questo significa:

$$V V^+ = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(ig)^r}{r!} \int d^4 u_1 \dots d^4 u_r \sum_{\alpha=0}^r (-1)^\alpha f_\alpha^{\rho_1 \dots \rho_\alpha} (x - u_1, \dots, x - u_\alpha) \times \\ \times f_{r-\alpha}^{\star \rho_r \dots \rho_{\alpha+1}} (x - u_r, \dots, x - u_{\alpha+1}) A_{\rho_1}(u_1) \dots A_{\rho_r}(u_r) \quad (2.24a)$$

$$V^+ V = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(ig)^r}{r!} \int d^4 u_1 \dots d^4 u_r \sum_{\alpha=0}^r (-1)^{r-\alpha} f_\alpha^{\star \rho_\alpha \dots \rho_1} (x - u_\alpha, \dots, x - u_1) \times \\ \times f_{r-\alpha}^{\rho_{\alpha+1} \dots \rho_r} (x - u_{\alpha+1}, \dots, x - u_r) A_{\rho_1}(u_1) \dots A_{\rho_r}(u_r) \quad (2.24b)$$

Affinchè sia soddisfatta l' unitarietà debbo imporre:

$$\sum_{\alpha=0}^k (-1)^\alpha f_\alpha^{\rho_1 \dots \rho_\alpha} (x - u_1, \dots, x - u_\alpha) f_{k-\alpha}^{\star \rho_k \dots \rho_{\alpha+1}} (x - u_k, \dots, x - u_{\alpha+1}) = 0 \quad (2.25a)$$

$$\sum_{\alpha=0}^k (-1)^{n-\alpha} f_\alpha^{\star \rho_\alpha \dots \rho_1} (x - u_\alpha, \dots, x - u_1) f_{k-\alpha}^{\rho_{\alpha+1} \dots \rho_k} (x - u_{\alpha+1}, \dots, x - u_k) = 0 \quad (2.25b)$$

In Rappresentazione degli Impulsi queste equazioni diventano:

$$\sum_{\alpha=0}^k \Phi_\alpha(\pi_1, \dots, \pi_\alpha; a_1, \dots, a_\alpha) \times \\ \times \Phi_{k-\alpha}^{\star}(-\pi_k, \dots, -\pi_{\alpha+1}; a_1, \dots, a_{k-\alpha}) = 0 \quad (2.26a)$$

$$\sum_{\alpha=0}^k \Phi_\alpha^{\star}(-\pi_\alpha, \dots, -\pi_1; a_1, \dots, a_\alpha) \times \\ \times \Phi_{k-\alpha}(\pi_{\alpha+1}, \dots, \pi_k; a_1, \dots, a_{k-\alpha}) = 0 \quad (2.26b)$$

Di queste equazioni abbiamo ricavato la soluzione solo sino al terzo ordine perturbativo, consistentemente con quanto detto a proposito della (2.11).

## Ordine 1

Le due condizioni di unitarietà sono eguali:

$$\Phi_1^{\star}(-\pi_1; a_1) + \Phi_1(\pi_1; a_1) = 0 \quad (2.27)$$

Da qui e dalla (2.14) si ottiene:

$$a_1 = a_1^{\star} \quad (2.28)$$

## Ordine 2

Le due condizioni di unitarietà al secondo ordine sono:

$$\Phi_2^{\star}(-\pi_2, -\pi_1; a_1, a_2) + \Phi_1(\pi_1; a_1) \Phi_1^{\star}(-\pi_2; a_1) + \\ + \Phi_2(\pi_1, \pi_2; a_1, a_2) = 0 \quad (2.29a)$$

$$\Phi_2(\pi_1, \pi_2; a_1, a_2) + \Phi_1^{\star}(-\pi_1; a_1) \Phi_1(\pi_2; a_1) + \\ + \Phi_2^{\star}(-\pi_2, -\pi_1; a_1, a_2) = 0 \quad (2.29b)$$

Sfruttando il fatto che  $a_1$  deve essere reale, le due equazioni diventano eguali. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi_2(\pi_1, \pi_2; a_1, a_2) - \Phi_1(\pi_1; a_1)\Phi_1(\pi_2; a_1) + \\ \Phi_2^*(-\pi_2, -\pi_1; a_1, a_2) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Da questa si ricavano dei vincoli per il parametro  $a_2$ :

$$Re a_2 = \frac{1}{2}a_1 (a_1 + 1) \quad Im a_2 = \textit{indeterminato} \quad (2.31)$$

### Ordine 3

Sfruttando i risultati precedenti si ottiene che le due condizioni di unitarietà per il terzo ordine perturbativo sono eguali. Si ha:

$$\begin{aligned} \Phi_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3; a_1, a_2, a_3) + \Phi_3^*(-\pi_3, -\pi_2, -\pi_1; a_1, a_2, a_3) - \\ - \Phi_2(\pi_1, \pi_2; a_1, a_2) \Phi_1(\pi_3; a_1) - \Phi_1(\pi_1; a_1) \Phi_2(\pi_2, \pi_3; a_1, a_2) + \\ + \Phi_1(\pi_1; a_1) \Phi_1(\pi_2; a_1) \Phi_1(\pi_3; a_1) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

Non riportiamo per intero il calcolo che è laborioso ma concettualmente semplice: si tratta di avere cura di raccogliere i termini con eguale numero di funzioni  $\delta$ . Il risultato è:

$$Re a_3 = \textit{indeterminato} \quad Im a_3 = Im a_2 (a_1 + 1) \quad (2.33)$$

### 2.2.3 Identità iconali ed Elettrodinamica

Il voler ristabilire un contatto tra il presente approccio e, limitatamente a *QED*, i campi composti proposti da Dirac (1.3), suggerisce di imporre la condizione di simmetrizzazione:

$$\sum_{perm} \Phi_k(\pi_1 \dots \pi_k) = \Phi_1(\pi_1) \dots \Phi_1(\pi_k) \quad (2.34)$$

Nel caso abeliano, in cui tutte le matrici  $A_{\mu_j}(w_j)$  nella (2.2) commutano, solo la parte totalmente simmetrica delle  $f_k^{\mu_1 \dots \mu_k}$  contribuisce, e la validità delle identità iconali (2.34) garantisce l'esponenziazione.

Nel caso non abeliano che stiamo qui discutendo, la (2.34) impone dei vincoli sui parametri  $a_k$  determinandone univocamente la forma:

$$a_k = \frac{1}{k!} a_1(a_1 + 1) \dots (a_1 + k - 1) \quad (2.35)$$

Anche per la (2.35) ci siamo limitati ad una verifica fino a  $k = 3$ , che non riportiamo in quanto di per sè poco illuminante: anche in tal caso si tratta di confrontare i coefficienti dei monomi con lo stesso numero di  $\delta$  nei due membri della (2.34).

La (2.35) è in accordo con le soluzioni (2.31) e (2.33) ottenute per la unitarietà, sebbene sia stata ricavata in modo indipendente. Si può anzi affermare che le due condizioni di:



- simmetrizzazione,
- realtà del parametro  $a_1$ ,

implicano la condizione di unitarietà. Naturalmente questo possiamo affermarlo solo sino al terzo ordine perturbativo.

Consistentemente con questo risultato d' ora in avanti ci limiteremo a considerare funzioni  $f_k$  ed operatori  $V$  definiti in termini di un solo parametro reale e semplificheremo la notazione:

$$[a] = a_1 \stackrel{def}{=} a \quad (2.36)$$

## 2.3 Campi Lorentz Covarianti

Le richieste dei paragrafi 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 hanno imposto dei precisi vincoli per le funzioni  $f_k$ : ad ogni funzione viene associato un vettore  $n$  sul quale, sinora, non si è fatta nessuna ipotesi.

In una situazione in cui fossero presenti  $2r$  campi  $\Psi^{(1)}, \bar{\Psi}^{(1)}, \dots, \Psi^{(r)}, \bar{\Psi}^{(r)}$ , si potrebbe associare a ciascuno di essi un diverso vettore  $n$ . Le alternative possibili sono varie. Consideriamone alcune:

1. I vettori sono tutti eguali tra loro:

$$n^{(1)} = \dots = n^{(2r)} = \eta;$$

Questa scelta può essere vista come quella che permette di implementare un gauge-fixing di tipo assiale a partire da una teoria con gauge-fixing lineare e covariante  $\xi$ . Su questo torneremo nel capitolo successivo. Lo svantaggio di una tale formulazione è che non ripristina la Lorentz covarianza, visto che si mantiene almeno una direzione privilegiata  $\eta$ .

2. La scelta del vettore  $n^{(j)}$  dipende dalla presenza degli altri  $2r - 1$  campi;

Discuteremo questa scelta direttamente in ambito quantistico richiamando il legame che esiste tra le funzioni di Wightman ed i campi ricostruiti a partire da essi tramite il Teorema di Ricostruzione [24, 25, 26].

Questa scelta potrebbe essere utile a ripristinare la Lorentz covarianza delle funzioni di correlazione: per esempio la funzione di correlazione

$$\langle \Psi^{(1)}(x_1; n^{(1)}, a^{(1)}) \bar{\Psi}(y_1; \bar{n}^{(1)}, \bar{a}^{(1)}) \dots \Psi^{(N)}(x_N; n^{(N)}, a^{(N)}) \bar{\Psi}(y_N; \bar{n}^{(N)}, \bar{a}^{(N)}) \rangle$$

potrebbe recuperare la Lorentz covarianza manifesta scegliendo, ad esempio:

$$n^{(1)} = x_1 - x_2 \quad \bar{n}^{(1)} = y_1 - y_2 \quad \dots\dots$$

Tale scelta, tuttavia, renderebbe difficile imparentare i campi eventualmente ricostruiti con quelli di partenza. Per tale ragione, ed a scapito di poterci confrontare con altri approcci esistenti in letteratura [2], non perseguiremo questa scelta ulteriormente.

3. Ogni vettore  $n^{(j)}$  è definito in modo indipendente dalla presenza degli altri campi.

Questa scelta è quella che a noi appare più naturale. Il fatto che ogni campo  $\Psi(x; n, a)$  mantenga la sua individualità impone che il vettore  $n$  possa dipendere soltanto da  $x$  o dall' impulso coniugato  $p$ . Per noi sarà:

$$n_\mu = p_\mu \quad (2.37)$$

L' argomento più convincente a sostegno di questa scelta è costituito dai risultati che riusciremo ad ottenere, particolarmente per quel che riguarda il comportamento near-mass-shell. Per ora osserviamo che la (2.37) è una di quelle scelte che ci permettono di soddisfare le proprietà di covarianza sotto trasformazioni di Lorentz.

Con la (2.37) i nostri campi assumo la forma:

$$\hat{\Psi}(p; n, a) \xrightarrow{n=p} \hat{\Upsilon}(p; a) \stackrel{def}{=} \hat{\Psi}(p; p, a) \quad (2.38a)$$

$$\Psi(x; n, a) \xrightarrow{n=p} \Upsilon(x; a) = \int \frac{d^4 n}{(2\pi)^4} e^{-inx} \int d^4 y e^{iny} \Psi(y; n, a) \quad (2.38b)$$

I campi  $\Upsilon$  sono notevolmente più complicati dei campi  $\Psi$ : oltre ad avere associato una stringa ad ogni campo  $\hat{\Psi}(p; n, a)$ , abbiamo, con la (2.37), decretato che la direzione di tale stringa sia esattamente quella di  $p$ .

## 2.4 Conclusioni

I risultati sinora ottenuti possono essere così sintetizzati:

- la Gauge invarianza e la Unitarietà di  $V$  ci hanno indicato la forma delle funzioni  $f_k$ ;
- la richiesta di Lorentz covarianza ci ha suggerito la scelta  $n = p$ .

I nostri campi risultano, quindi, quelli di (2.38b) e (2.38a).

I campi  $\Psi$  e  $\Upsilon$  soddisfano alle seguenti equazioni [10]:

$$(\not{p} - m) \hat{\Psi}(p; n, a) = g \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi i)^4} T_{\mu\nu}(k; n, a) \hat{A}^\nu(k) \hat{\Psi}(p - k; n, a) \quad (2.39a)$$

$$(\not{p} - m) \hat{\Upsilon}(p; a) = g \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} T_{\mu\nu}(k; p, a) \hat{A}^\nu(k) \hat{\Psi}(p - k; p, a) \quad (2.39b)$$

dove il tensore:

$$T_{\mu\nu}(k; n, a) = g_{\mu\nu} - \frac{k^\mu n^\nu}{[kn]_a} \quad (2.40)$$

ha le proprietà:

$$n^\mu T_{\mu\nu}(k; n, a) = 0 \quad (2.41a)$$

$$T_{\mu\nu}(k; n, a) k^\nu = 0 \quad (2.41b)$$

Si noti come la (2.39a) coinvolge  $\hat{\Psi}(p; n, a)$  e  $\hat{\Psi}(p - k; n, a)$  e pertanto può essere a tutti gli effetti considerata come l'equazione del moto del campo  $\Psi$  definito con un vettore  $n$  generico.

La stessa cosa non può essere detta per la (2.39b): essa coinvolge due campi diversi che sono  $\hat{\Upsilon}(p; a)$  e  $\hat{\Psi}(p - k; p, a)$ . Il campo  $\Upsilon$  non possiede una dinamica chiusa e pertanto non può che essere considerato come campo composto a partire da  $\psi$  ed  $A_\mu$ .

Il ripristino della Lorentz covarianza ci ha portato alle seguenti due situazioni:

1. Da un lato si hanno i campi  $\Psi$  definiti con  $n$  generico. Essi possiedono una dinamica chiusa, sono gauge invarianti e pertanto in termini di essi si potrebbe portare avanti il programma, che era di Dirac, di costruire una teoria che coinvolgesse soltanto i due gradi di libertà fisici del fotone. Una tale teoria non avrebbe la Lorentz covarianza manifesta.
2. Dall'altra i campi  $\Upsilon$ . Essi non possiedono una dinamica chiusa e quindi non è possibile attuare il programma precedente, però è valida la Lorentz covarianza.

Per concludere, in riferimento al punto 1 del paragrafo 2.4, notiamo che la (2.39a) può essere messa nella forma:

$$(\not{p} - m) \hat{\Psi}(p; \eta, a) = g \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi i)^4} \hat{\mathcal{A}}_\mu(k; \eta, a) \hat{\Psi}(p - k; \eta, a) \quad (2.42)$$

dove il campo  $\hat{\mathcal{A}}_\mu(k; \eta, a)$  è definito come:

$$\hat{\mathcal{A}}_\mu(k; \eta, a) = T_{\mu\nu}(k; \eta, a) \hat{A}^\nu(k) \quad (2.43a)$$

$$\eta \cdot \hat{\mathcal{A}}(k; \eta, a) = 0 \quad (2.43b)$$

La (2.42) è l'equazione di Dirac valida per il campo  $\Psi(x; \eta, a)$ , mentre la (2.43b) può essere vista come l'implementazione di una gauge di tipo assiale sui campi  $\hat{\mathcal{A}}_\mu(k; \eta, a)$ .

Torneremo su questa possibilità nel paragrafo 3.6 e mostreremo come, anche per questa via, si incontrano, a livello quantistico, difficoltà non dissimili da quelle di altri autori [29].

# Capitolo 3

## Campi Carichi Gauge Invarianti: il caso della QED

Nel riferirci alla Elettrodinamica Quantistica supporremo i campi  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e  $A^\mu$  rinormalizzati secondo l' usuale schema di rinormalizzazione con condizioni di normalizzazione on-shell in cui al fotone è assegnata una massa  $\mu$  che funge da regolatore infrarosso [1, 27].

### 3.1 Definizioni

Per l' Elettrodinamica classica abbiamo ottenuto i seguenti risultati:

$$\Psi(x; n, a) = V(x; n, a) \psi(x) \quad (3.1a)$$

$$\bar{\Psi}(x; n, a) = \bar{\psi}(x) V^+(x; n, a) \quad (3.1b)$$

$$V(x; n, a) = e^{-ig \int d^4w f^\mu(x-w; n, a) A_\mu(w)} \quad (3.1c)$$

$$\hat{f}_\mu(k; n, a) = i n_\mu \left( \frac{1}{nk + i\epsilon} + 2 \pi i a \delta(nk) \right) \quad (3.1d)$$

Il primo passo nella definizione dei campi carichi gauge invarianti per la *QED* è:

$$\Psi(x; n, 1) = T \left( : V(x; n, 1) : \psi(x) \right) \quad (3.2a)$$

$$\bar{\Psi}(x; n, 1) = T \left( \bar{\psi}(x) : V^+(x; n, 1) : \right) \quad (3.2b)$$

dove il simbolo  $: \dots :$  è quello del prodotto normale, ed il  $T$ -ordinamento agisce sui tempi dei campi  $A^\mu$  che definiscono  $V$  e sul tempo  $x_0$  di  $\psi(x)$ .

Nelle (3.2) abbiamo posto  $a = 1$ . Nostro scopo è mostrare che, con questa scelta di  $a$ , non si hanno inconsistenze: discuteremo alla fine del capitolo come sia possibile, all' ordine 1-loop, scegliere  $a$  in modo diverso.

Vedremo, in breve, che in base a questa definizione dei campi, tutte le funzioni di correlazione vengono ad essere definite in termini di un nuovo tipo di funzioni, dette  $T$ -sector

functions [11, 12], così definite (a questo proposito è utile anche la consultazione dei recenti lavori [13, 14] e di quelli in essi citati):

$$W(X_1, s_1 | \dots | X_n, s_n) = \langle 0 | T^\pm \left( \chi(x_1^{(1)}) \dots \chi(x_{n_1}^{(1)}) \right) \dots T^\pm \left( \chi(x_1^{(N)}) \dots \chi(x_{n_N}^{(N)}) \right) | 0 \rangle \quad (3.3)$$

dove  $X_i = (x_1^{(i)} \dots x_{n_i}^{(i)})$ ,  $s_i = \pm$  è il segno dell'ordinamento temporale e  $\chi = \psi, \bar{\psi}, A^\mu$ . Le funzioni di Wightman sono particolari  $T$ -sector-functions in cui ogni settore contiene un solo campo. Le funzioni di Green sono particolari  $T$ -sector-functions composte da un solo settore con  $T$ -ordinamento positivo.

Consideriamo, infatti, l'esempio della funzione di Green:

$$\mathcal{G} = \theta(x_0 - y_0) \langle 0 | \Psi(x; n, a) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - \theta(y_0 - x_0) \langle 0 | \bar{\psi}(y) \Psi(x; n, a) | 0 \rangle \quad (3.4)$$

Essa è determinata all'ordine  $g^2$  da due  $T$ -sector-functions:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \simeq & \langle 0 | T \left( \psi(x) \bar{\psi}(y) \right) | 0 \rangle - \\ & - (ig) \theta(x_0 - y_0) \int d^4 w f_\mu(x - w; n, a) \langle 0 | T \left( A^\mu(w) \psi(x) \right) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle + \\ & + (ig) \theta(y_0 - x_0) \int d^4 w f_\mu(x - w; n, a) \langle 0 | \bar{\psi}(y) T \left( A^\mu(w) \psi(x) \right) | 0 \rangle + \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

A causa di questa situazione non possiamo più applicare l'equazione di Dyson-Schwinger che collega la rappresentazione di Heisenberg a quella di interazione e fornisce la rappresentazione diagrammatica delle usuali funzioni di Green [18].

Siamo quindi obbligati a ricorrere alla rappresentazione diagrammatica delle  $T$ -sector-functions.

Si osservi che, data una funzione di Green  $\mathcal{G}(x_1, \dots, x_s)$  che coinvolga almeno un campo  $\Psi$ , si hanno due tipi di  $T$ -ordinamento: uno riguarda l'ordinamento temporale dei punti  $(x_1, \dots, x_s)$  esplicitato dalle funzioni  $\theta$  come in (3.4), mentre l'altro è quello introdotto nella definizione (3.2).

Anche per le funzioni di Wightman bisogna ricorrere alle  $T$ -sector-functions. Ad esempio la:

$$\mathcal{W} = \langle 0 | \Psi(x; n, a) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (3.6)$$

è determinata all'ordine  $g^2$  da una sola  $T$ -sector functions:

$$\mathcal{W} \simeq \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle - (ig) \int d^4 w f_\mu(x - w; n, a) \langle 0 | T \left( A^\mu(w) \psi(x) \right) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle$$

In questo caso la situazione è più semplice in quanto compare soltanto l'ordinamento temporale della definizione (3.2). È quindi evidente che è più semplice studiare le funzioni di Wightman tramite la rappresentazione diagrammatica delle  $T$ -sector-functions.

Limitatamente alle funzioni a due punti costruite con i campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ , le funzioni di Green potranno essere ricavate dalle corrispondenti funzioni di Wightman tramite la rappresentazione spettrale [28]. Quest'ultima, infatti, non richiede che sia verificata l'ipotesi di località.

Infine, la scelta di studiare funzioni di Wightman insieme alla presenza di convoluzioni tra le  $T$ -sector-functions e le funzioni  $f$ , causano il fatto che, in questo contesto, non esiste l' analogo della equazione Schwinger-Dyson [18]. Pertanto non potremo trascurare il contributo dei grafici  $OPR$ .

## 3.2 Regole di Ostendorf-Steinmann

Per il calcolo delle  $T$ -sector-functions ci serviremo delle Regole di Ostendorf-Steinmann. Posta una qualunque  $T$ -sector-function (3.3):

$$W = \sum_k g^k W_k$$

le regole di Ostendorff-Steinmann permettono di ottenere le  $W_k$  come somme di grafici definiti nel modo seguente:

- Si disegnino i grafici di  $QED$  relativi all' ordine perturbativo  $k$ . I grafici non debbono essere necessariamente connessi. Non possono essere di tipo vuoto-vuoto.
- Si calcoli il coefficiente combinatorio di ciascun grafico.
- I grafici vengono partizionati in sottografici detti settori che possono essere interni oppure esterni secondo le seguenti regole:
  1. i punti di uno stesso settore  $(X_i, s_i)$  vanno messi sempre tutti assieme. Un tale settore è detto esterno;
  2. i punti corrispondenti ai vertici interni possono essere messi in un settore esterno oppure costituire da soli un settore indipendente oppure essere messi assieme ad altri vertici interni;

Un settore composto di soli punti interni è detto interno. Un settore contenente punti esterni è comunque detto esterno.

- Ad ogni settore  $S$  si associa un numero  $\nu(S)$  secondo le seguenti regole:
  1. ai settori esterni contenenti  $(X_i, s_i)$  si associa il numero  $\nu(S) = i$ ;
  2. ai settori interni va associato un numero compreso tra il massimo ed il minimo numero dei settori ad esso adiacenti.
- Ai settori così numerati va associato un segno secondo le seguenti regole:
  1. i settori esterni contenenti  $(X_i, s_i)$  prendono il segno  $s_i$ ;
  2. i settori interni con  $i \leq \nu(S) \leq i+1$  prendono il segno  $s_i$  se  $s_i = s_{i+1}$ ;
  3. i grafici contenenti settori interni con  $i \leq \nu(S) \leq i+1$  e con  $s_i \neq s_{i+1}$  non vanno considerati.

- Due partizioni con la stessa topologia sono considerate diverse solo se per almeno una coppia di settori  $S$  ed  $S'$  una partizione presenta  $\nu(S) > \nu(S')$  mentre l'altra  $\nu(S) < \nu(S')$ .
- avendo partizionato il grafico si associa ad esso un integrando secondo le seguenti regole:
  1. nei settori con segno positivo valgono le usuali Regole di Feynmann di  $QED$ ;
  2. nei settori con segno negativo valgono i c.c. delle regole di Feynmann di  $QED$ ;
  3. per le linee che congiungono vertici  $x$  e  $y$  appartenenti a settori diversi, con  $x \in S$ ,  $y \in S'$ ,  $\nu(S) \leq \nu(S')$  si ha  $S_W(x - y)$  oppure  $D_W(x - y)$  a seconda che la linea sia fermionica o bosonica;
  4. ogni settore interno porta un segno  $(-1)$ .
- $W_k$  è la somma di tutte le partizioni con gli opportuni coefficienti combinatori.

Queste regole sono riepilogate in figura (3.1), insieme a tutte le altre regole diagrammatiche che useremo.

Si osservi che, in analogia alla notazione usata nelle Regole di Cutkosky-Veltman [15], quando non sussistano ambiguità indicheremo le linee fermioniche o fotoniche che congiungono due settori diversi, con impulso diretto dal settore a numero piú basso a quello con il numero piú alto, con un taglio.

### 3.3 I campi carichi gauge invarianti in QED

In questo paragrafo vogliamo mostrare come le definizioni (3.2) determinino la struttura di  $W_2$ . Manterremo inizialmente un  $n$  generico e sottolineeremo, quando occorrerà, il ruolo della scelta  $n = p$ .

Consideriamo la funzione di Wightman a due punti:

$$W_2(x - y; n, 1; \bar{n}, 1) = \langle 0 | \Psi(x; n, 1) \bar{\Psi}(y; \bar{n}, 1) | 0 \rangle$$

sino al primo ordine perturbativo in  $g$ . Per fare ciò espandiamo l'operatore  $V$  in termini della costante di accoppiamento  $g$ :

$$\Psi(x) = \psi(x) + (-ig) \int d^4 z f_\mu(x - z; n, a) T \left( A^\mu(z) \psi(x) \right) + \dots \quad (3.7a)$$

$$\bar{\Psi}(y) = \bar{\psi}(y) + (+ig) \int d^4 w f_\mu(x - w; \bar{n}, \bar{a}) T \left( \bar{\psi}(y) A^\mu(w) \right) + \dots \quad (3.7b)$$

Il contributo  $1 - loop$  a  $W_2$  si ottiene prendendo l'ordine  $g^2$  della seguente espressione:

$$W_2^{1-loop}(x - y; n, 1; \bar{n}, 1) = W_A + W_B + W_C + W_D \quad (3.8)$$





dove:

$$W_A(x-y) = \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (3.9a)$$

$$W_B(x-y) = (-ig) \int d^4z f_\mu(x-z; n, 1) \langle 0|T\left(A^\mu(z)\psi(x)\right)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (3.9b)$$

$$W_C(x-y) = (+ig) \int d^4w f_\nu(y-w; \bar{n}, 1) \langle 0|\psi(x) T\left(\bar{\psi}(y)A^\nu(w)\right)|0\rangle \quad (3.9c)$$

$$W_D(x-y) = (-ig) (+ig) \int \int d^4z d^4w f_\mu(x-z; n, 1) f_\nu(y-w; \bar{n}, 1) \times \\ \times \langle 0|T\left(A^\mu(z)\psi(x)\right) T\left(\bar{\psi}(y)A^\nu(w)\right)|0\rangle \quad (3.9d)$$

Si pone:

$$A(x, y) = \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (3.10a)$$

$$B^\mu(x, y, z) = \langle 0|T\left(A^\mu(z)\psi(x)\right)\bar{\psi}(y)|0\rangle \quad (3.10b)$$

$$C^\nu(x, y, w) = \langle 0|\psi(x) T\left(\bar{\psi}(y)A^\nu(w)\right)|0\rangle \quad (3.10c)$$

$$D^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \langle 0|T\left(A^\mu(z)\psi(x)\right) T\left(\bar{\psi}(y)A^\nu(w)\right)|0\rangle \quad (3.10d)$$

Per ottenere l'ordine  $g^2$  di  $W_2^{1-loop}$  si dovrà considerare l'ordine  $g^2$  per  $A$ , l'ordine  $g$  per  $B^\mu$  e  $C^\nu$  e l'ordine zero per  $D^{\mu\nu}$ : vedi figura (3.2)

Le relative sector-partitions sono in figura 3.3.

- I grafici  $A2$ ,  $A3$ ,  $A4$  sono nulli perché, a causa della rinormalizzazione, la usuale self-energia dell'elettrone  $\Sigma(\not{p}, m)$  è di ordine  $(\not{p} - m)^2$ . Osserviamo che da un punto strettamente matematico il grafico  $A4$  non è ben definito perché contiene un fattore:

$$\delta(p^2 - m^2) (p^2 - m^2)^2 \delta(p^2 - m^2)$$

che, come prodotto di distribuzioni, non è ben definito. Abbiamo interpretato le regole di Ostendorf-Steinmann nel senso di associare le  $\delta$  ai  $(p^2 - m^2)$  nel seguente modo:

$$\delta(p^2 - m^2)(p^2 - m^2)^2\delta(p^2 - m^2) = \left((p^2 - m^2)\delta(p^2 - m^2)\right)\left((p^2 - m^2)\delta(p^2 - m^2)\right) = 0.$$

- I grafici  $B3$  e  $C3$  sono nulli perché proporzionali a  $\delta(k^2) \delta(p^2 - m^2) \delta((p-k)^2 - m^2)$ .
- La presenza del  $T$ -ordinamento nella definizione di  $\Psi$  ci impone di mettere, nella funzione  $B^\mu$ , i punti  $x$  e  $z$  dentro lo stesso settore. Pertanto non potremo mai avere grafici come  $B4$  (figura (3.4)).
- Analogamente, nella funzione  $C^\nu$  non avremo mai grafici come  $C4$  (figura (3.4)).

Figura 3.2: Grafici relativi alle  $T$ -sector-functions  $A, B^\mu, C^\nu, D^{\mu\nu}$ .

- La presenza del  $T$ -ordinamento sulla funzione  $D^{\mu\nu}$  ci impone di mettere nello stesso settore i punti  $x$  e  $z$  ed i punti  $y$  e  $w$ .
- Vediamo, ora, quali sono gli apporti dell'ordinamento normale. Considerando nella espansione di  $\Psi$  e  $\bar{\Psi}$  i termini di ordine superiore a  $g$ , a prima vista si possono ottenere contributi del tipo:

$$W_E \propto \int d^4z d^4z' f_\mu(x-z; n, a) f_{\mu'}(x-z'; n, a) E^{\mu\mu'}(x, y, z, z') \quad (3.11a)$$

$$W_F \propto \int d^4w d^4w' f_\nu(y-w; \bar{n}, \bar{a}) f_{\nu'}(y-w'; \bar{n}, \bar{a}) F^{\nu\nu'}(x, y, w, w') \quad (3.11b)$$

$$E^{\mu\mu'}(x, y, z, z') = \langle 0|T \left( : A^\mu(z) A^{\mu'}(z') : \psi(x) \right) \bar{\psi}(y) |0\rangle \quad (3.11c)$$

$$F^{\nu\nu'}(x, y, w, w') = \langle 0| \psi(x) T \left( \bar{\psi}(y) : A^\nu(w) A^{\nu'}(w') : \right) |0\rangle \quad (3.11d)$$

Questi grafici vengono vietati dalla presenza dell'ordinamento normale. Se non lo avessimo introdotto ci saremmo trovati di fronte a grafici del tipo  $E$  e  $F$  (figure (3.5)).

Per dimostrare perché i grafici del tipo  $B4, C4, E, F$  debbano essere eliminati ripristiniamo le scelte  $n = p$  e  $\bar{n} = -p$  (quest'ultima è imposta dalla invarianza per traslazioni) e

Figura 3.3: Sector Partitions relative alle  $T$ -sector-functions  $A, B^\mu, C^\nu, D^{\mu\nu}$ . I numeri labellano i settori

consistentemente, adottiamo la notazione semplificata:

$$W_2(x-y) \stackrel{def}{=} W_2(x-y; p, 1; -p, 1) = \langle 0 | \Upsilon(x; 1) \bar{\Upsilon}(y; 1) | 0 \rangle \quad (3.12)$$

I contributi relativi ai suddetti grafici prendono, quindi, la forma di figura (3.6) dove i pallini bianchi indicano la convoluzione tra il grafico e le  $f$ . Fourier trasformando la (3.12) esattamente all' impulso  $p$  i vari grafici sono:

$$\hat{W}_{B4} \propto \hat{S}_W(p) \int d^4k \hat{f}_\mu(k; p, 1) \gamma_\nu \hat{S}_W(p-k) g^{\mu\nu} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.13a)$$

$$\hat{W}_E \propto \hat{S}_W(p) \int d^4k \hat{f}_\mu(k; p, 1) f_{\mu'}(-k; p, 1) g^{\mu\mu'} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \quad (3.13b)$$

Evidentemente  $W_{C4} = W_{B4}$  e  $W_F = W_E$ .

Figura 3.4: Sector Partitions ottenibili senza  $T$ -ordinamento

Figura 3.5: Sector Partitions ottenibili senza ordinamento normale

**Grafico  $W_E$**

Essendo  $p = (p_0, \mathbf{0})$ , la presenza del prodotto

$$f_\mu(k; p, 1) f_\mu(-k; p, 1) \propto \frac{1}{pk - i\epsilon} \frac{1}{-pk - i\epsilon} \quad (3.14)$$

porta, nel piano complesso  $k_0$ , a poli disposti come in figura (3.7). L' integrazione in  $dk_0$  è, pertanto, non definita per la presenza di pinch-singularities.

Questo inconveniente è eliminato dall' ordinamento normale.

**Grafico  $W_{B_4}$**

A causa di  $S_W(p) S_W(p - k)$  questo grafico contiene un fattore:

$$\frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{pk - i\epsilon} = \frac{1}{2pk + i\epsilon} \frac{1}{pk - i\epsilon} \quad (3.15)$$

Figura 3.6: Alcuni grafici relativi ottenibili senza ordinamento normale e senza  $T$ -ord

che presenta anch' esso le pinch-singularities.

Ecco, allora, perchè riteniamo opportuno introdurre il  $T$ -ordinamento.

### 3.4 Vertici extra

A livello diagrammatico possiamo integrare le usuali Regole di Feynmann introducendo ulteriori vertici corrispondente alla presenza di  $f$ . Per spiegare come ciò possa essere fatto ritorniamo alla  $W_B$  di cui si era parlato nel paragrafo 3.3.

In Rappresentazione delle Coordinate  $W_B$  è data da una convoluzione tra la  $f_\mu(x; p, +1)$  e le varie sector-partitions della  $T$ -sector-function  $B^\mu$ . In Rappresentazione degli Impulsi questa convoluzione diventa un prodotto tra  $\hat{f}_\mu(k; p, +1)$  e le trasformate di Fourier delle sector-partitions.

Allora posso associare alla  $f$  un pallino bianco ed esprimere diagrammaticamente la  $W_B$  come in figura (3.8) [10].

Il valore di questo nuovo vertice, che chiameremo vertice extra, lo possiamo ottenere svolgendo la trasformata di Fourier di  $W_B$ . La stessa cosa può essere fatta per  $W_C$  e  $W_D$ . I risultati sono in figura (3.9) .

Osservo che il vertice 1 coinvolge la trasformata della  $f(x, p, 1)$  , mentre il vertice 2 coinvolge la trasformata della  $f(x, -p, 1)$ . È solo grazie al fatto che abbiamo deciso di prendere  $a = 1$  in entrambi i casi che i due vertici risultano eguali.

Figura 3.7: Poli nel piano complesso

Figura 3.8: Rappresentazione diagrammatica di  $W_B$

## 3.5 La funzione di Wightman 1 loop

### 3.5.1 Espansione diagrammatica

Abbiamo visto nel paragrafo 3.3 che l'ordine  $g^2$  della funzione di Wightman a due punti  $W_2(x - y)$  è dato dalla (3.8).

Usando la convenzione di indicare la presenza di una  $f$  con un pallino bianco, le corrispondenti  $W$  si rappresentano diagrammaticamente come in figura (3.10).

### 3.5.2 Rinormalizzazione Moltiplicativa

Sinora non ci siamo preoccupati delle divergenze ultraviolette della  $W_2$ , mentre in effetti i grafici  $W_{B2}$  e  $W_{C2}$  sono divergenti. Tali grafici hanno la struttura:

$$W_{B2,C2} \propto (2\pi) \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) \left( a(p^2) (\not{p} - m) + b(p^2) m \right) = S_W b(m^2) m$$

Figura 3.9: Vertici extra

cioè di una costante che moltiplica  $S_W$ , poichè posso porre  $\not{p} = m$  in tutto l' integrale. Introduciamo una costante di rinormalizzazione nei campi  $\Upsilon$ :

$$\Upsilon_R = \sqrt{\zeta} \Upsilon \quad \bar{\Upsilon}_R = \sqrt{\zeta} \bar{\Upsilon} \quad (3.16)$$

L' espansione in serie di  $g$  della funzione di Wightman rinormalizzata è data da:

$$W_{2,R} = \langle 0 | \Upsilon_R \bar{\Upsilon}_R | 0 \rangle = W^{(0)} + g^2 \left( W_2^{1-loop} + \zeta^{1-loop} W^{(0)} \right)$$

Osservo che all' ordine zero la funzione  $W_2$  costruita con i campi  $\Upsilon$  coincide con  $S_W$ , cioè  $W^{(0)} = S_W$ . Allora l' ordine 1-loop è definito da:

$$W_{2,R}^{1-loop} = W_2^{1-loop} + \zeta^{1-loop} S_W \quad (3.17)$$

Definiamo  $\zeta$  all' ordine 1-loop in modo tale da eliminare i due grafici divergenti  $W_{B2}$  e  $W_{C2}$ .

In conclusione, tra tutti i grafici ottenibili dalle  $T$ -sector-functions, i soli che definiscono la funzione di Wightman a due punti rinormalizzata sono quelli di figura (3.11):

### 3.5.3 Calcolo di $W_{2,R}^{1-loop}$

I grafici verranno calcolati nella seguente forma

$$\hat{W}_{\#}^{L-loop} = \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^L \pi (i S_F) \hat{\sigma}_{\#} (i S_F) \quad (3.18)$$

ovvero troncando i propagatori esterni. Si ha:

$$\hat{\sigma}_{A1} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (i g) \gamma_\nu S_W(p-k) (i g) \gamma_\mu D_W^{\mu\nu}(k) \quad (3.19a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{B1} &= \hat{\sigma}_{C1} = \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (i g) \gamma_\nu S_W(p-k) (-i g) \frac{i p_\mu}{pk - i\epsilon} D_W^{\mu\nu}(k) (-i) (\not{p} - m) \end{aligned} \quad (3.19b)$$

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{D1} &= (-i) (\not{p} - m) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (i g) \frac{-i p^\nu}{pk - i\epsilon} S_W(p-k) \times \\ &\quad \times (-i g) \frac{i p_\mu}{pk - i\epsilon} D_W^{\mu\nu}(k) (-i) (\not{p} - m) \end{aligned} \quad (3.19c)$$

Il calcolo esplicito di queste funzioni dà:

$$\Gamma = \frac{p^2 - m^2}{2 p^2} \theta(p_0) \theta(p^2 - m^2) \quad (3.20a)$$

$$\hat{\sigma}_{A1} = \Gamma \left( \not{p} \frac{p^2 + m^2}{p^2} - 4 m \right) \quad (3.20b)$$

$$\hat{\sigma}_{B1} = \hat{\sigma}_{C1} = \Gamma \left( \not{p} + m \right) \quad (3.20c)$$

$$\hat{\sigma}_{D1} = \Gamma \left( - 2 \not{p} \right) \quad (3.20d)$$

Da cui si ricava:

$$\hat{\sigma}_{2,R}^{1-loop} = \Gamma \left( \not{p} \frac{p^2 + m^2}{p^2} - 2 m \right) \quad (3.21a)$$

$$\hat{W}_{2,R}^{1-loop} = - \alpha \frac{p^2 - m^2}{2 p^4} \theta(p_0) \theta(p^2 - m^2) \not{p} \quad (3.21b)$$

Due sono i commenti da fare sulla (3.21b):

1.  $\hat{W}_{2,R}^{1-loop}$  risulta essere infrarosso finita. A quest' ordine tale proprietà vale grafico a grafico.
2. Il comportamento near-mass-shell dell' ordine 1-loop è di ordine  $(p^2 - m^2)$  e pertanto non modifica la singolarità dell' ordine albero. A livello di funzioni di Green, questo equivale a dire che la singolarità dell' ordine albero  $1/(p^2 - m^2)$  non viene modificata: la dimensione anomala infrarossa é nulla a quest' ordine perturbativo.

### 3.5.4 Gauge Invarianza

Quel che vogliamo fare è dimostrare che  $\hat{W}_{2,R}^{1-loop}$  non dipende dal parametro di gauge-fixing  $\xi$ . Per fare ciò calcoleremo la derivata logaritmica rispetto a  $\xi$  di  $\hat{W}_{2,R}^{1-loop}$ .



Questo non è il modo più semplice per fare una dimostrazione della gauge invarianza: usiamo questa tecnica in vista di una sua applicazione al calcolo a 2-loop che faremo nel capitolo successivo.

Siccome  $\xi$  compare soltanto nel propagatore fotonico  $D_F^{\mu\nu}$  e nella corrispondente funzione di Wightman  $D_W^{\mu\nu}$ , occorrerà calcolare le derivate logaritmiche di  $D_W^{\mu\nu}$  e di  $D_F^{\mu\nu}$ . Scrivo  $D_F^{\mu\nu}$  e  $D_W^{\mu\nu}$  nella forma:

$$D_F^{\mu\nu} = -i \left( \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{\mu^2}) \right)$$

$$D_W^{\mu\nu} = 2\pi \theta(k_0) \left( \delta(k^2 - \mu^2) (g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{\mu^2}) + \delta(k^2 - \mu^2/\xi) \frac{k^\mu k^\nu}{\mu^2} \right)$$

Allora si ottiene:

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} D_F^{\mu\nu} = i \frac{k^\mu k^\nu}{\xi} \frac{1}{(k^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon)^2} \quad (3.23a)$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial \xi} D_W^{\mu\nu} = 2\pi \theta(k_0) \frac{k^\mu k^\nu}{\xi} \delta'(k^2 - \mu^2/\xi) \quad (3.23b)$$

### Dimostrazione diagrammatica per $W_{2,R}^{1-loop}$

Introduciamo una rappresentazione grafica per le derivate logaritmiche rispetto a  $\xi$  di  $D_F^{\mu\nu}$ , di  $D_W^{\mu\nu}$  e per le identità di Ward come in figura (3.12) [16].

Usando queste indicazioni le derivate logaritmiche dei grafici possono essere scritte come in figura (3.13):

La somma dei primi due grafici è nulla, così come quella degli ultimi due. Pertanto  $\hat{W}_{2,R}^{1-loop}$  risulta essere Gauge Invariante.

### Una dimostrazione alternativa della Gauge Invarianza

Posto:

$$\int d\Gamma = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \theta(k_0) \theta(p_0 - k_0) \delta(k^2) \delta((p-k)^2 - m^2) \quad (3.24)$$

la somma dei quattro che grafici che definiscono  $W_{2,R}^{1-loop}$  può essere messa nella seguente forma:

$$\sigma = - \frac{\alpha}{\pi} \int d\Gamma \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu d_{\mu\nu} \quad (3.25a)$$

$$d_{\mu\nu} = T_{\mu\alpha}(k; p) \left( g_{\alpha\beta} - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right) T_{\nu\beta}(-k; -p) =$$

$$= g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu k^\nu + p^\nu k^\mu}{pk - i\epsilon} + p^2 \frac{k^\mu}{pk - i\epsilon} \frac{k^\nu}{pk - i\epsilon} \quad (3.25b)$$

$$p^\mu T_{\mu\nu}(k; p) = 0 \quad (3.25c)$$

$$T_{\mu\nu}(k; p) k^\nu = 0 \quad (3.25d)$$

Questa espressione costituisce un metodo alternativo per verificare l' invarianza di Gauge usando la (3.25d).

### 3.6 Campi carichi gauge invarianti e gauge assiale

Avevamo visto nel paragrafo 2.3 come, in presenza di piú campi, una delle scelte possibili fosse quella di porre tutti i vettori  $n$  relativi a tali campi, eguali ad un solo vettore  $\eta$ . Avevamo osservato che quella scelta va interpretata come l' implementazione di un gauge assiale sui campi  $\mathcal{A}_\mu$ . In tal caso il propagatore del campo  $\mathcal{A}_\mu$  è:

$$\begin{aligned} \int d^4k e^{ik(x-y)} \langle T \left( \mathcal{A}_\mu(x; \eta, 1) \mathcal{A}_\nu(y; \eta, 1) \right) \rangle &= T_{\mu\rho}(k; \eta, 1) T_{\nu\sigma}(-k; \eta, 1) g_{\rho\sigma} = \\ &= -i \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - \frac{\eta^\nu k^\mu}{\eta k - i\epsilon} - \frac{\eta^\mu k^\nu}{\eta k + i\epsilon} + \eta^2 \frac{k^\mu}{\eta k - i\epsilon} \frac{k^\nu}{\eta k + i\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

La sostituzione della (3.26) al posto della (3.25b) rende in altro modo il fatto che la scelta  $n = \bar{n} = \eta$  realizza, formalmente, il gauge assiale. Tuttavia, mentre la (3.25b) è ben definita, la (3.26) non lo è perchè contiene il fattore:

$$\frac{1}{\eta k - i\epsilon} \frac{1}{\eta k + i\epsilon} \quad (3.27)$$

che presenta una pinch-singularities.

Ritroviamo, così per altra strada, difficoltà simili a quelle di altri autori. Una rassegna degli altri punti di vista è in [29]. Quando la quantizzazione viene effettuata in gauge assiale del tipo:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{GF}} = \frac{1}{2} \lambda (\eta \cdot A)^2 \quad (3.28)$$

il propagatore del fotone assume la forma:

$$D_F^{\mu\nu} = -i \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \left( g^{\mu\nu} - \frac{\eta^\mu k^\nu + \eta^\nu k^\mu}{[\eta k]} + n^2 \frac{k^\nu k^\mu}{[\eta k]^2} \right) \quad (3.29)$$

simile a quella da noi ottenuta nella (3.26).

Nella (3.29) le prescrizioni dei poli  $1/[\eta k]$  ed  $1/[\eta k]^2$  sono effettuate, secondo [29], nel seguente modo:

$$\frac{1}{[\eta k]} = PV\left(\frac{1}{\eta k}\right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\eta k + i\epsilon} + \frac{1}{\eta k - i\epsilon} \right) \quad (3.30a)$$

$$\frac{1}{[\eta k]^2} = - \frac{\partial}{\partial(\eta k)} \frac{1}{[\eta k]} \quad (3.30b)$$

Questa prescrizione dei poli, che di per sè non è definita positiva, fa perdere la positività nella somma sulle polarizzazioni.

- Alcuni autori cercano di risolvere il problema modificando il termine di gauge fixing con l' introduzione di ghosts. In tal modo si perde uno dei principali vantaggi delle gauges assiali: l' assenza di gradi di liberta non fisici.
- Altri considerano la possibilità che le funzioni di Green siano distribuzioni agenti su uno spazio di Besov di funzioni test che si annullano in  $\eta \cdot k = 0$ .
- Altri ancora considerano:

$$\frac{1}{[\eta k]} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\eta k}{(\eta k)^2 + \epsilon^2} \quad (3.31)$$

Lo svantaggio di questo metodo consiste nel fatto che vengono modificate le identità di Ward e i ghosts non sono più disaccoppiati.

Nel nostro formalismo questi problemi non vengono superati.

La scelta  $n = p$  relativa alla costruzione dei campi  $\Upsilon$ , oltre a ripristinare la covarianza, come si vede dalla (3.25b), ha la virtù di far sì che il problema delle pinch-singularities non si ponga.

## 3.7 Conclusioni

Due sono i risultati ottenuti sinora. Da una parte abbiamo svolto alcune considerazioni che ci hanno portato alla definizione dei nostri campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .

Dall' altra, investigando sulla  $W_2^{1-loop}$  abbiamo scoperto che essa possiede alcune interessanti strutture:

- La  $W_2$  presenta divergenze ultraviolette che, a quest' ordine, sono eliminabili con una rinormalizzazione moltiplicativa dei campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .

La  $W_{2,R}^{1-loop}$ :

- è gauge invariante.
- è infrarosso finita.
- è di ordine  $(p^2 - m^2)$  per  $p^2 \simeq m^2$ .

Prima di continuare vogliamo fare alcune considerazioni.

### 3.7.1 Regole di Ostendorf-Steinmann e di Cutkosky-Veltman

È naturale osservare che il risultato da noi ottenuto nell' individuare i grafici che definiscono  $W_{2,R}^{1-loop}$  ha una certa similarità con quello ottenibile, almeno per le teorie di campo ordinarie, tramite le regole di Cutkosky-Veltman. Queste ultime, tuttavia, non sono direttamente applicabili al caso in esame per la presenza dei vertici extra.

È vero, tuttavia, che limitatamente ad 1-loop, per la funzione  $W_{2,R}$  il nostro risultato è riassumibile in una estensione delle usuali regole di *C.V.*:

- le linee fermioniche ed i vertici ordinari seguono le usuali regole;
- i vertici extra associati alla presenza delle  $f$  seguono le regole di *C.V.* per i vertici standard: non vanno tagliati.

Possiamo, cioè, affermare che i nostri grafici seguono delle regole di *C.V.* in cui i tagli vanno effettuati solo sulle parti di grafico associate alla propagazione delle particelle.

### 3.7.2 Prescrizione generica

Abbiamo calcolato l' ordine 1-loop della funzione di Wightman avendo definito la funzione  $f_1^\mu(x; p, a)$  con  $a = 1$ . Si dimostra facilmente che a quest' ordine la scelta  $a = 0$  porta agli stessi risultati visti nelle (3.20): il fatto che nello spazio delle fasi sia presente una  $\delta((p - k)^2 - m^2)$  fa sì che i denominatori  $1/(pk - i\epsilon)$  non si annullino mai e quindi le due prescrizioni siano equivalenti.

Questo ed il fatto che la  $f_1^\mu(x; p, a)$  può essere messa nella forma:

$$\hat{f}_1^\mu(k; p, a) = \frac{(1+c)}{2} \hat{f}_+^\mu(k; p) + \frac{(1-c)}{2} \hat{f}_-^\mu(k; p) \quad (3.32a)$$

$$a = \frac{1-c}{2} \quad (3.32b)$$

$$\hat{f}_+^\mu(k; p) = i p_\mu \frac{1}{pk + i\epsilon} \quad (3.32c)$$

$$\hat{f}_-^\mu(k; p) = i p_\mu \frac{1}{pk - i\epsilon} \quad (3.32d)$$

fa sì che tutte le scelte di  $a$  siano, a quest' ordine, equivalenti.

Figura 3.10: grafici per la funzione  $W_2^{1-loop}$  non rinormalizzata

Figura 3.11: grafici per la funzione  $W$  rinormalizzata

Figura 3.12: Regole diagrammatiche per la dimostrazione della Gauge Invarianza

Figura 3.13: Rappresentazione grafica di  $\xi \frac{\partial}{\partial \xi} W_{2,R}^{1-loop}$



# Capitolo 4

## Calcolo dell' ordine 2-loop

In quel che segue manterremo sempre la scelta di porre  $m = 1$ .

L' ordine 2-loop della funzione di Wightman  $W_{2,R}$  verrà studiato per valori dell' impulso coniugato:

$$1 \leq p^2 \leq 9 \quad (4.1)$$

Pertanto non saranno presi in considerazione i grafici che contengono, come sottografo, la polarizzazione di vuoto 1-loop: per ragioni di soglia cinematica tali grafici, nella regione (4.1), sono nulli.

### 4.1 $W_2^{2-loop}$ : Espansione Diagrammatica

L' ordine  $g^4$  della funzione di Wightman a due punti rinormalizzata è dato da:

$$W_{2,R}^{2-loop} = W_2^{2-loop} + \zeta^{1-loop} W_{1,R}^{1-loop} + \zeta^{2-loop} S_W \quad (4.2)$$

Osservo che  $W_2^{2-loop}$  è non rinormalizzata per quanto riguarda le divergenze proprie dei campi composti, ma include tutti i grafici contenenti i controtermini della rinormalizzazione di  $QED$  standard (brevemente, contrografici), visto che nella definizione (3.2) di  $\Psi$  compare  $\psi$  rinormalizzato.  $W_2^{2-loop}$  contiene tutti i contrografici proporzionali a  $Z_1$  e  $Z_2$ . Tuttavia, grazie alla (4.1), non dovremo considerare i contrografici proporzionali a  $Z_3$ .

Definiamo la  $\zeta^{2-loop}$  come quella costante che ci permette di eliminare tutti quei grafici che hanno una gamba esterna tagliata, ovvero tutti quei grafici che sono proporzionali a  $S_W$ , così come fatto nel caso 1-loop. Un esempio di tali grafici è dato in figura (4.1).

La  $W_2^{2-loop}$  è data da:

$$W_2^{2-loop} = W_A + W_B + W_C + W_D + W_E + W_F + \\ + W_G + W_H + W_I \quad (4.3)$$

dove:

$$W_A = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (4.4a)$$

Figura 4.1: Un esempio di un grafico che contribuisce a  $\zeta^{2-loop}$

$$W_B = + i g \int d^4 w f_\nu(y-w; -p, 1) B^\nu(x, y, w) \quad (4.4b)$$

$$W_C = - i g \int d^4 z f_\mu(x-z; p, 1) C^\mu(x, y, z) \quad (4.4c)$$

$$W_D = g^2 \int d^4 z \int d^4 w f_\nu(y-w; -p, 1) f_\mu(x-z; p, 1) D^{\mu\nu}(x, y, z, w) \quad (4.4d)$$

$$W_E = - \frac{1}{2} g^2 \int d^4 z \int d^4 z' f_\mu(x-z; p, 1) f_{\mu'}(x-z'; p, 1) E^{\mu\mu'}(x, y, z, z') \quad (4.4e)$$

$$W_F = - \frac{1}{2} g^2 \int d^4 w \int d^4 w' f_\nu(y-w; -p, 1) f_{\nu'}(y-w'; -p, 1) F^{\nu\nu'}(x, y, w, w') \quad (4.4f)$$

$$W_G = + \frac{i}{2} g^3 \int d^4 z \int d^4 w \int d^4 w' f_\mu(x-z; p, 1) f_\nu(y-w; -p, 1) \times \\ \times f_{\nu'}(y-w'; -p, 1) G^{\mu\nu\nu'}(x, y, z, w, w') \quad (4.4g)$$

$$W_H = - \frac{i}{2} g^3 \int d^4 z \int d^4 z' \int d^4 w f_\mu(x-z; p, 1) f_{\mu'}(x-z'; p, 1) \times \\ \times f_\nu(y-w; -p, 1) H^{\mu\mu'\nu}(x, y, z, z', w) \quad (4.4h)$$

$$W_I = + \frac{1}{4} g^4 \int d^4 z \int d^4 z' \int d^4 w \int d^4 w' f_\mu(x-z; p, 1) f_{\mu'}(x-z'; p, 1) \times \\ \times f_\nu(y-w; -p, 1) f_{\nu'}(y-w'; -p, 1) I^{\mu\mu'\nu\nu'}(x, y, z, z', w, w') \quad (4.4i)$$

dove le funzioni dentro gli integrali rappresentano le  $T$ -sector-functions:

$$A(x, y) = \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (4.5a)$$

$$B^\nu(x, y, w) = \langle 0 | \psi(x) T \left( \bar{\psi}(y) A^\nu(w) \right) | 0 \rangle \quad (4.5b)$$

$$C^\mu(x, y, z) = \langle 0 | T \left( A^\mu(z) \psi(x) \right) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (4.5c)$$

$$D^{\mu\nu}(x, y, z, w) = \langle 0 | T \left( A^\mu(z) \psi(x) \right) T \left( \bar{\psi}(y) A^\nu(w) \right) | 0 \rangle \quad (4.5d)$$

$$E^{\mu\mu'}(x, y, z, z') = \langle 0 | T \left( : A^\mu(z) A^{\mu'}(z') : \psi(x) \right) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \quad (4.5e)$$

$$F^{\nu\nu'}(x, y, w, w') = \langle 0 | \psi(x) T \left( \bar{\psi}(y) : A^\nu(w) A^{\nu'}(w') : \right) | 0 \rangle \quad (4.5f)$$

$$G^{\mu\nu\nu'}(x, y, z, w, w') = \langle 0 | T \left( A^\mu(z) \psi(x) \right) T \left( \bar{\psi}(y) : A^\nu(w) A^{\nu'}(w') : \right) | 0 \rangle \quad (4.5g)$$

$$H^{\mu\mu'\nu}(x, y, z, z', w) = \langle 0 | T \left( : A^\mu(z) A^{\mu'}(z') : \psi(x) \right) T \left( \bar{\psi}(y) A^\nu(w) \right) | 0 \rangle \quad (4.5h)$$

$$\begin{aligned} I^{\mu\mu'\nu\nu'}(x, y, z, z', w, w') &= \langle 0 | T \left( : A^\mu(z) A^{\mu'}(z') : \psi(x) \right) \times \\ &\times T \left( \bar{\psi}(y) : A^\nu(w) A^{\nu'}(w') : \right) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.5i)$$

Dai grafici ottenibili a partire da queste  $T$ -sector-functions eliminiamo subito quelli annullati dalla presenza di  $\zeta^{2-loop} S_W$ . Allora i grafici che definiscono  $W_{2,R}^{2-loop}$  possono essere raggruppati in cinque classi. Mutuando una terminologia propria delle Regole di Cutkosky-Veltman indicheremo tali classi con:

1. tagli a tre corpi in figura (4.3),
2. tagli a due corpi in figure (4.4) e (4.5),
3. tagli a quattro corpi in figura (4.6),
4. grafici di Rinormalizzazione Standard in figura (4.7),
5. grafici di Rinormalizzazione 1-loop.

I grafici di queste figure sono il risultato del procedimento, visto nel capitolo 3, di calcolare le sector-partitions di ogni  $T$ -sector-function e, poi, effettuare la convoluzione con le funzioni  $f$ .

La notazione utilizzata per indicare i grafici segue il seguente criterio:

- la prima lettera identifica la sector-partition del grafico;
- il numero indica il numero di linee tagliate nel grafico;
- l' ultima lettera indica se il grafico è un  $OPI$  oppure un  $OPR$ ;
- i grafici della classe "3 corpi" non hanno l' ultima lettera perché in quel caso ho soltanto grafici  $OPI$ . Tuttavia alcuni di essi, essendo attribuibili alla stessa  $T$ -sector-function hanno una lettera che li distingue a seconda che siano di tipo "arcobaleno" oppure "intrecciato" (ad esempio i grafici  $A3A$  e  $A3I$  di  $QED$  standard);
- i grafici della classe "Rinormalizzazione Standard" sono indicati con il prefisso "ct" seguito dal nome del grafico di cui annullano la divergenza ultravioletta.

A questi grafici va assegnato un coefficiente moltiplicativo che è dato dal prodotto di tre numeri :

1. Il primo numero è associato alla sector partition. Come visto nelle (4.4) ogni funzione  $W$  ha un coefficiente dovuto alla espansione dell' operatore  $V$ . Inoltre ogni sector partition può essere realizzata in vari modi: la funzione  $W_I$  ha un coefficiente  $1/4$  ma la sua sector-partition  $I^{\mu\mu'\nu\nu'}$  produce due grafici equivalenti: il grafico  $I3$ . Tale grafico avrà, dunque, un coefficiente  $1/2$ .
2. Il secondo numero è dovuto al fatto che alcuni grafici sono eguali. Nel caso 1-loop avevamo già visto questo con i grafici  $B1$  e  $C1$ . All' ordine 2-loop i grafici delle sector partitions  $B$ ,  $E$  e  $G$  sono eguali rispettivamente ai grafici delle sector-partitions  $C$ ,  $F$ ,  $H$ . Pertanto invece di considerare doppi grafici eguali ne prenderemo soltanto uno assegnandogli un coefficiente 2.
3. Il terzo numero è dato dal fatto che per uno stesso grafico si possono avere sector-partitions eguali. È questo, per esempio, il caso del grafico  $A2I$ : le due sector-partitions della classe 2-corpi sono eguali.

Quando non detto esplicitamente si deve intendere che i grafici vanno moltiplicati per i rispettivi coefficienti che sono riassunti nella seguente tabella:

grafico	coefficiente	grafico	coefficiente	grafico	coefficiente
A3I	1	A2I	2	A4I	1
A3A	1	B2I	2	C4I	2
C3I	2	C2I	2	D4I	1
C3A	2	D2I	2	A4R	1
D3I	1	E2	2	C4R	2
D3A	1	G2	2	D4R	1
E3	2	A2R	2		
G3	2	B2R	2		
I3	1/2	C2R	2		
		D2R	2		

I grafici della classe "Rinormalizzazione Standard" non contengono tutti i possibili grafici costruibili a partire dai controvertici di  $QED$ : molti di essi sono già stati usati per annullare dei grafici provenienti dalle sector-partitions di  $W_2^{2-loop}$ . Un esempio di tale meccanismo è mostrato in figura (4.2).

Figura 4.2: meccanismo di cancellazione tra grafici

Figura 4.3:



Figura 4.5:





Figura 4.7:

## 4.2 Rinormalizzazione Moltiplicativa

I grafici che presentano divergenze ultraviolette, oltre a quelli delle classi "Rinormalizzazione Standard" e "Rinormalizzazione 1-loop", sono soltanto quelli della classe "2 corpi". La divergenza ultravioletta dei grafici  $A2I$ ,  $B2I$ ,  $A2R$ ,  $B2R$  è resa nulla rispettivamente dai grafici  $ctA2I$ ,  $ctB2I$ ,  $ctA2R$ ,  $ctB2R$ . Pertanto il contributo ultravioletto alla  $W_{2,R}^{2-loop}$  è determinato dai grafici della classe "Rinormalizzazione 1-loop" e dai grafici  $E2I$ ,  $G2I$ ,  $B2R$ ,  $D2R$ .

Il comportamento ultravioletto di questi ultimi è determinato dal sottografico non tagliato che essi contengono. In figura (4.8) tale sottografico è stato boxato.

Figura 4.8: Dimostrazione diagrammatica della Rinormalizzazione

Come si può notare dalla figura questo sottografico divergente è proprio uno dei due grafici che definiscono  $\zeta^{1-loop}$ . Pertanto, a meno di parti ultraviolette finite, possiamo affermare che esso è pari alla metà di  $\zeta^{1-loop}$ . Questo fattore 1/2 è compensato dal fatto che ogni grafico, secondo la tabella presedente, ha un coefficiente 2. Pertanto si ottiene che  $W_{2,R}^{2-loop}$  non ha divergenze ultraviolette.

Si osservi come, per il raggiungimento di questo risultato, sia stato necessario considerare anche i grafici one-particle-reducible  $B2R$  e  $D2R$ . Come già indicato nel capitolo 3 questi grafici vanno introdotti perché non è più valida, in questo contesto, l'equazione di Dyson-Schwinger.

### 4.3 Gauge Invarianza

La dimostrazione della Gauge Invarianza di  $W_{2,R}^{2-loop}$  viene effettuata sfruttando le regole diagrammatiche riportate nel paragrafo 3.5.3 [16]. I risultati possono essere così riepilogati:

- i grafici della classe "4 corpi" costituiscono una classe di grafici gauge invarianti: figura (4.11);
- i grafici della classe "3 corpi" costituiscono una classe di grafici gauge invarianti: figura (4.12);
- i grafici della classe "Rinormalizzazione standard" costituiscono una classe di grafici gauge invarianti, sfruttando il fatto che  $Z_1 = Z_2$ : figura (4.15);
- i grafici della classe "rinormalizzazione 1-loop" danno un contributo

$$\left( \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta^{1-loop} \right) W_{2,R}^{1-loop} \quad (4.6)$$

Questo risultato è dovuto alla gauge invarianza di  $W_{2,R}^{1-loop}$ ;

- il contributo dei grafici della classe "2 corpi", studiati nelle figure (4.13) e (4.14), è riepilogato in figura (4.9).

Figura 4.9: Gauge Invarianza per i tagli a 2 corpi

Anche nei grafici di figura (4.9) si può fattorizzare  $W_{2,R}^{1-loop}$  visto che il tadpole contribuisce per un numero che può essere messo a fattore comune. Usando le stesse regole diagrammatiche la derivata logaritmica di  $\zeta^{1-loop}$  può essere rappresentata come in figura (4.10).

Figura 4.10: Rappresentazione diagrammatica della derivata logaritmica di  $\zeta^{1-loop}$

La somma dei grafici di figura (4.9) e dei grafici associati alla (4.6) risulta nulla.

Pertanto, anche all'ordine 2-loop,  $W_{2,R}$  è gauge invariante.

Si noti come anche in questa dimostrazione i grafici *OPR* sono stati fondamentali nel permettere una corretta fattorizzazione della funzione di Wightman dell'ordine inferiore nei grafici della classe "2-corpi". La loro presenza, inoltre, ha reso possibile il fatto che i grafici della classe "4-corpi" ed i grafici della classe "Rinormalizzazione Standard" siano gauge invarianti.

Figura 4.11:



Figura 4.13:



Figura 4.14:

Figura 4.15: Il punto indica la derivata logaritmica rispetto a  $\xi$

## 4.4 Il problema delle divergenze infrarosse

Vogliamo ora dimostrare come all' ordine 2-loop la  $W_{2,R}$  non presenta divergenze infrarosse. La dimostrazione consisterà dei seguenti passi:

1. Mostriamo che esistono grafici divergenti e classificheremo i possibili tipi di divergenze.
2. Mostriamo che le divergenze dei tagli a due corpi cancellano parzialmente le divergenze dei tagli a tre corpi con un meccanismo simile a quello di cancellazione delle divergenze reali e virtuali visto in [17].
3. Le divergenze residue dei tagli a tre corpi sono cancellate dai grafici della classe "Rinormalizzazione 1-loop".

### 4.4.1 Classificazione delle divergenze

Consideriamo i grafici  $A3A$ ,  $D3A$ ,  $C3I$ , di figura (4.3)  $C3I$  di figura (4.4),

1. Il grafico  $A3A$  è dato da:

$$A3A = \int d\Gamma_3 N_{A3A} \frac{1}{D_1^2} \quad (4.7a)$$

$$d\Gamma_3 = \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(k_0) \theta(q_0) \theta(p_0 - k_0 - q_0) (2\pi) \delta(k^2 - \mu^2) \times \\ \times (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi) \delta((p - k - q)^2 - 1) \quad (4.7b)$$

$$N_{A3A} = (ig) \gamma^\mu i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k} - \not{q} + 1) \times \\ \times (ig) \gamma^\nu i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \gamma_\mu \quad (4.7c)$$

$$D_1 = (p - k)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.7d)$$

La divergenza infrarossa viene dall' annullarsi di  $D_1$ , il che avviene quando  $q \rightarrow 0$ : infatti in questo limite:

$$D_1 \simeq 2 w \cdot q \quad w = p - k \quad (4.8)$$

Espandendo l' integrando in serie di  $q$  attorno a  $q = 0$  si ha:

$$A3A \simeq \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \theta(k_0) (2\pi) \delta(k^2 - \mu^2) \theta(p_0 - k_0) (2\pi) \delta((p - k)^2 - 1) \times \\ \times (ig) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \gamma_\mu \times \\ \times \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) (ig)^2 \frac{iw^\nu}{w \cdot q} \frac{iw_\nu}{w \cdot q} + \\ + \text{termini IR - finiti} \quad (4.9)$$

Nel primo integrale riconosciamo la funzione  $A1$  vista all' ordine 1-loop. Posto:

$$\mathcal{I}_1 = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \frac{w^\nu}{w \cdot q} \frac{w_\nu}{w \cdot q} \quad w^2 = 1 \quad (4.10)$$

il risultato (4.9) può essere piú efficacemente ricavato in termini diagrammatici come mostrato in figura (4.16), dove gli elementi in neretto sono quelli che entrano nella definizione di  $\mathcal{I}_1$ .

2. Il grafico  $D3A$  è espresso da:

$$D3A = \int d\Gamma_3 N_{D3A} \frac{1}{D_1^2 D_3^2} \quad (4.11a)$$

$$N_{D3A} = (-i)^2 (\not{p} - 1) (ig) i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \gamma^\nu (\not{p} - \not{k} - \not{q} + 1) \times \\ \times (ig) \gamma^\nu i (\not{p} - \not{k} + 1) (-i)^2 (ig) (\not{p} - 1) \quad (4.11b)$$

$$D_1 = (p - k)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.11c)$$

$$D_3 = p \cdot k - i\epsilon \quad (4.11d)$$

In questo grafico si hanno due tipi di divergenza in considerazione del fatto che i denominatori sono eguali a coppie. Tralasciamo di discutere ulteriormente la divergenza associata ai denominatori  $D_1$ : osserviamo soltanto che usando la tecnica illustrata al punto precedente otteniamo la fattorizzazione della  $D1$  dell' ordine 1-loop.

La divergenza infrarossa associata ai denominatori  $D_3$  si ha, invece, per  $k \rightarrow 0$ . In questo limite il grafico può essere messo nella forma:

$$D3A \simeq \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \theta(p_0 - q_0) (2\pi) \delta((p - q)^2 - 1) \times \\ \times (ig) \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + 1) (ig) \gamma_\mu \times \\ \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \theta(k_0) \delta(k^2 - \mu^2) (2\pi) (ig)^2 \frac{-ip^\mu}{p \cdot k} \frac{-ip_\mu}{p \cdot k} \\ + \text{termini IR - finiti} \quad (4.12)$$

Nel primo integrale riconosciamo la funzione  $A1$  vista all' ordine 1-loop. Posto:

$$\mathcal{I}_2 = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \frac{p^\nu}{p \cdot q} \frac{p_\nu}{p \cdot q} \quad (4.13)$$

il risultato (4.12) ha la rappresentazione diagrammatica data in figura (4.16), dove gli elementi in neretto sono quelli che entrano nella definizione di  $\mathcal{I}_2$ .

3. Consideriamo il grafico  $C3I$ :

$$C3I = \int d\Gamma_3 N_{C3I} \frac{1}{D_1 D_2 D_3} \quad (4.14a)$$

$$N_{C3I} = (ig) \gamma^\nu i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} - \not{k} + 1) \times \\ \times (ig) \gamma_\nu i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) (-i) p_\mu (-i) (\not{p} - 1) \quad (4.14b)$$

$$D_1 = (p - k)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.14c)$$

$$D_2 = (p - q)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.14d)$$

$$D_3 = p \cdot k - i\epsilon \quad (4.14e)$$

La divergenza infrarossa di questo grafico avviene per  $k \rightarrow 0$ . Infatti in tale limite  $D_1$ , che ha lo stesso comportamento visto al punto 1, si annulla insieme a  $D_3$ .

Espandendo, come negli altri casi, l' integrando attorno a  $k \rightarrow 0$  si ha:

$$C3I \simeq \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \theta(p_0 - q_0) (2\pi) \delta((p - q)^2 - m^2) \times \\ \times (ig) \gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) (ig) \gamma_\mu \times \\ \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \theta(k_0) \delta(k^2 - \mu^2) (2\pi) (ig)^2 \frac{-ip^\mu}{p \cdot k} \frac{iw_\mu}{w \cdot k} \\ + \text{termini IR - finiti} \quad (4.15)$$

Nel primo integrale riconosciamo ancora una volta la funzione  $A1$  vista all' ordine 1-loop. Posto:

$$\mathcal{I}_R = -g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) \delta(q^2 - \mu^2) (2\pi) \frac{p^\nu}{p \cdot q} \frac{w_\nu}{w \cdot q} \quad (4.16a)$$

$$w^2 = 1 \quad w \cdot q = \frac{p^2 + 1}{2} \quad (4.16b)$$

il risultato (4.15) ha la rappresentazione diagrammatica data in figura (4.16), dove gli elementi in neretto sono quelli che entrano nella definizione di  $\mathcal{I}_R$ .

4. Infine consideriamo il grafico  $C2I$ .

$$C2I = \int d\Gamma_2 N_{C2I} \frac{1}{D_0 D_1 D_3 D_5} \quad (4.17a)$$

$$d\Gamma_2 = \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \theta(p_0 - q_0) (2\pi) \delta((p - q)^2 - 1) \quad (4.17b)$$

$$N_{C2I} = (-i) (ig) \gamma^\nu i (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) \not{p} i (\not{p} - \not{k} - \not{k} + 1) \times \\ \times (ig) \gamma_\nu (\not{p} - \not{k} + 1) (ig) (-i)^2 (\not{p} - 1) \quad (4.17c)$$

$$D_0 = k^2 - \mu^2 + i\epsilon \quad (4.17d)$$

$$D_1 = (p - k)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.17e)$$

$$D_3 = p \cdot k - i\epsilon \quad (4.17f)$$

$$D_5 = (p - k - q)^2 - 1 + i\epsilon \quad (4.17g)$$

La divergenza infrarossa di questo grafico avviene per  $k \rightarrow 0$ . Infatti in tale limite:

$$D_5 \simeq k^2 - 2(p - q)k + i\epsilon \quad (4.17h)$$

Espandendo, come negli altri casi, l' integrando attorno a  $k \rightarrow 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
C2I \simeq & \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \theta(p_0 - q_0) (2\pi) \delta((p - q)^2 - 1) \times \\
& \times (i g)^2 \gamma^\mu (\not{p} - \not{q} + 1) \gamma_\mu \times \\
& \times \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} (i g)^2 \frac{-i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{p^\mu}{p \cdot k - i\epsilon} \frac{2(p - q)_\mu}{k^2 - 2(p - q)k + i\epsilon} \\
& + \text{termini IR - finiti}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Nel primo integrale riconosciamo ancora una volta la funzione A1 vista all' ordine 1-loop. Posto:

$$\mathcal{I}_V = g^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{-i}{q^2 - \mu^2 + i\epsilon} \frac{p^\nu}{p \cdot q} \frac{-2w_\nu - i\epsilon}{q^2 - 2wq + i\epsilon} \tag{4.19}$$

il risultato (4.18) ha la rappresentazione diagrammatica data in figura(4.16), dove gli elementi in neretto sono quelli che entrano nella defizione di  $\mathcal{I}_V$ .

I fattori  $\pm i\epsilon$  sono stati riportati solo in  $\mathcal{I}_V$  perché gli altri integrali non richiedono prescrizione.

I risultati sin qui raggiunti possono essere così sintetizzati: le divergenze infrarosse di ogni grafico possono essere ottenute assegnando ad ogni linea fotonica il suo fattore di divergenza infrarossa. Ogni linea fotonica ha due fattori di divergenza, ciascuno associato alle sue estremità.

I fattori di divergenza sono di due tipi: uno è il fattore  $1/pk$  dei vertici extra, mentre l' altro è un fattore  $((p - q) k)^{-1}$  associato ai propagatori fermionici  $((p - k)^2 - 1)^{-1}$ .

Le divergenze infrarosse di tutti i grafici di  $W_{2,R}^{2-loop}$  sono espresse in termini degli dagli integrali  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_R$  e  $\mathcal{I}_V$  nelle figure (4.17), (4.18) e (4.19).

## 4.4.2 Fattorizzazione

Dalle figure (4.17), (4.18) e (4.19) possiamo ricavare i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
\hat{W}_{IR}^{3-corpi} &= \hat{W}_{2,R}^{1-loop} (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2 \mathcal{I}_R) = \\
&= g^2 \hat{W}_{2,R}^{1-loop} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \theta(q_0) (2\pi) \delta(q^2 - \mu^2) \left( \frac{w_\mu}{wq + i\epsilon} - \frac{p_\mu}{pq + i\epsilon} \right)^2
\end{aligned} \tag{4.20a}$$

$$\hat{W}_{IR}^{2-corpi} = \hat{W}_{2,R}^{1-loop} (2 \mathcal{I}_V) \tag{4.20b}$$

Nella espressione di  $\hat{W}_{IR}^{2-corpi}$  il fattore 2 è dovuto ai coefficienti dei grafici.

Nella (4.20) abbiamo, come al solito, accorpato i grafici a seconda del numero di tagli. Questo ci permette di osservare che viene fattorizzata la  $\hat{W}_{2,R}^{1-loop}$ .

La divergenza infrarossa di  $\hat{W}_{2,R}^{2-loop}$  si ottiene considerando, insieme a questi, anche i grafici della classe di "Rinormalizzazione 1-loop", il cui contributo è:

$$\hat{W}_{IR}^{Rin-1-loop} = \zeta_{IR}^{1-loop} \hat{W}_{2,R}^{1-loop} \tag{4.21}$$

Figura 4.16: Esempi di grafici divergenti all' infrarosso

dove  $\zeta_{IR}^{1-loop}$  è la parte divergente infrarossa della costante di rinormalizzazione  $\zeta^{1-loop}$ . Il calcolo di  $\zeta_{IR}^{1-loop}$  può essere effettuato usando i risultati della Appendice C in cui è riportato il calcolo del grafico che definisce  $\zeta^{1-loop}$ . Si ottiene:

$$\zeta_{IR}^{1-loop} = -\frac{\alpha}{\pi} 2 \log \mu \quad (4.22)$$

Il calcolo della parte divergente infrarossa degli integrali  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$ ,  $\mathcal{I}_R$ ,  $\mathcal{I}_V$  porta ai seguenti risultati:

$$\mathcal{I}_1 = +\frac{\alpha}{\pi} \log \mu \quad (4.23a)$$

$$\mathcal{I}_2 = +\frac{\alpha}{\pi} \log \mu \quad (4.23b)$$

$$\mathcal{I}_R = -\frac{\alpha}{\pi} \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \log p \log \mu \quad (4.23c)$$

$$\mathcal{I}_V = +\frac{\alpha}{\pi} \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \log p \log \mu \quad (4.23d)$$

Pertanto il contributo a  $W_{2,R}^{2-loop}$  delle divergenze infrarosse è:

$$\begin{aligned}
IR^{2-loop} &= \hat{W}_{IR}^{3-corpi} + \hat{W}_{IR}^{2-corpi} + \hat{W}_{IR}^{Rin-1-loop} = \\
&= \hat{W}_{2,R}^{1-loop} (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + 2 \mathcal{I}_R + 2 \mathcal{I}_V) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.24}$$

### 4.4.3 Meccanismo di cancellazione dell' infrarosso

Confrontiamo, ora, i contributi all' infrarosso delle sector-partitions di uno stessa  $T$ -sector-function.

Si hanno due possibilità:

- nella sector partition non si hanno termini dipendenti da  $\mathcal{I}_R$  o da  $\mathcal{I}_V$ .
- se invece essi sono presenti, stanno sempre nella combinazione  $\mathcal{I}_R + \mathcal{I}_V$ .

Si noti, poi, che:

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = -\frac{1}{2} \zeta_{IR}^{1-loop} \tag{4.25a}$$

$$\mathcal{I}_R = -\mathcal{I}_V \tag{4.25b}$$

$$\tag{4.25c}$$

per cui si hanno questi due risultati:

1. All' interno di una sector partition la divergenza dei grafici della classe "2-corpi" cancella parzialmente la divergenza dei grafici della classe 3-corpi.
2. Sommando le divergenze residue dei tagli a tre corpi, si ha che il loro contributo è cancellato dai grafici di Rinormalizzazione 1-loop.







Figura 4.19:

## 4.5 Calcolo analitico dell' ordine 2-loop

Dal calcolo all' ordine 1-loop avevamo imparato alcune cose:

1.  $W_{2,R}^{1-loop}$  risulta ultravioletto finita rinormalizzando moltiplicativamente i campi  $\Upsilon$  e  $\bar{\Upsilon}$ .
2.  $W_{2,R}^{1-loop}$  è gauge invariante.
3.  $W_{2,R}^{1-loop}$  è infrarosso finita.
4.  $W_{2,R}^{1-loop}$  è reale.

Avevamo, anche, ottenuto delle indicazioni circa il comportamento near-mass-shell di  $W_{2,R}$  all' ordine 1-loop.

I primi 3 punti sono stati verificati anche all' ordine 2-loop nei paragrafi 4.2, 4.3, 4.4. In questa parte della tesi forniremo la dimostrazione che, come ci si deve aspettare per una funzione di Wightman, anche a 2-loop essa è reale.

Inoltre forniremo una verifica analitica della cancellazione delle divergenze ultraviolette vista nel paragrafo 4.2.

Per fare questo calcoleremo analiticamente i grafici delle classi "2-corpi" e "4-corpi". Il calcolo analitico dei grafici della classe "3-corpi" non sarà effettuato in quanto essi non presentano divergenze ultraviolette e non hanno parte immaginaria.

Abbiamo utilizzato *Mathematica* [36] per quanto riguarda la parte algebrica e di calcolo degli integrali. Per il calcolo della tracce delle matrici  $\gamma$  ci siamo serviti del package *Tracer.m* [37].

### 4 corpi

Il calcolo di tali grafici é molto semplice in quanto essi possono essere calcolati come prodotti dei grafici di 1-loop.

I risultati sono riepilogati in Appendice A.

Questi grafici non contribuiscono all' infrarosso nè alla divergenza ultravioletta e non hanno parte reale.

### 2 corpi-OPI

Per il calcolo di questi grafici abbiamo utilizzato la seguente tecnica: dapprima i grafici sono stati parametrizzati in termini di 15 integrali. Quindi abbiamo espresso tali integrali in termini di 10 integrali più semplici tramite relazioni algebriche. Infine abbiamo calcolato questi 10 integrali in Regolarizzazione Dimensionale [15], dove necessario.

Le parametrizzazioni, le relazioni tra integrali e i 10 integrali calcolati sono riportati in Appendice B.

## 2 corpi-OPR

I grafici di questa classe sono dati da prodotti di grafici dell' ordine 1-loop, e dei due grafici riportati in Appendice C.

Non si hanno divergenze infrarosse.

### 4.5.1 Meccanismo di cancellazione delle parti immaginarie

All' ordine 1-loop si verificava "a vista" che  $W_{2,R}$  é reale. In questo caso la verifica non é altrettanto semplice.

Il meccanismo di cancellazione delle parti immaginarie é il seguente: data una  $T$ -sector-function si puó osservare come la somma dei grafici ottenibili dalle sue sector partitions dia un risultato reale. In particolare, per ogni  $T$ -sector-function i grafici della classe "3 corpi" non danno parte immaginaria, i grafici della classe "4 corpi" non hanno parte reale, i grafici della classe "2 corpi" hanno una parte immaginaria che é esattamente quella dei corrispondenti grafici della classe "4 corpi", con un segno cambiato. Ad ulteriore conferma di questo meccanismo, va osservato che gli unici grafici che non sviluppano parte immaginaria sono quelli relativi alle sector partitions  $E, F, G, H$  e  $I$  (4.4), le quali sono le uniche a non avere grafici nella classe "4 corpi".

Il segno di differenza tra le due parti immaginarie é dovuto al fatto che i grafici della classe "4 corpi" hanno tutti un fattore  $(-1)$  associato al loro internal-sector.

Il calcolo é stato fatto calcolando le parti immaginarie degli integrali che parametrizzano i grafici ed inserendole nelle parametrizzazioni stesse.

A titolo di esempio riportiamo:

$$2 \operatorname{Im} \hat{\sigma}_{A2R} - \hat{\sigma}_{A4R} = 0 \quad (4.26a)$$

$$2 \operatorname{Im} \hat{\sigma}_{C2R} - \hat{\sigma}_{C4R} = 0 \quad (4.26b)$$

$$2 \operatorname{Im} \hat{\sigma}_{A2I} - \hat{\sigma}_{A4I} = 0 \quad (4.26c)$$

$$2 \operatorname{Im} \hat{\sigma}_{B2I} - \hat{\sigma}_{C4R} = 0 \quad (4.26d)$$

dove il fattore 2 é il coefficiente comune a tutti i grafici della classe "2-corpi- $OPI$ ", come riportato nella tabella del paragrafo 4.1.

### 4.5.2 Verifica analitica dell' Ultravioletto

I grafici divergenti sono quelli di figura (4.8) nel paragrafo 4.2. I risultati epliciti di quei grafici sono riportati nella Appendice B per quanto riguarda  $E2I$  e  $G2I$  e nella Appendice C per quanto riguarda i grafici  $B2R$  e  $D2R$ . La cancellazione delle divergenze ultraviolette é stata effettuata nel seguente modo:

- Abbiamo espresso ogni grafico nella forma:

$$\hat{\sigma}_{\dots} = \hat{\sigma}_{\dots}^{UV} UV + \text{parti finite} \quad (4.27)$$

$$UV = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log(4 \pi \mu^2) \quad (4.28)$$

ricordiamo che  $UV$  è l' usuale polo ultravioletto della Regolarizzazione Dimensionale in  $(4 - 2\epsilon)$  dimensioni.

- Abbiamo calcolato questi coefficienti isolando in ogni integrale usato nelle parametrizzazioni il coefficiente di  $UV$  ed inserendolo, poi, nelle parametrizzazioni stesse.
- Abbiamo dimostrato che, in accordo con la equazione diagrammatica vista nel paragrafo 4.2 (figura (4.8)), per i coefficienti  $\sigma_{\dots}^{UV}$  vale la equazione:

$$2 (\hat{\sigma}_{E2I}^{UV} + \hat{\sigma}_{G2I}^{UV} + \hat{\sigma}_{B2R}^{UV} + \hat{\sigma}_{D2R}^{UV}) = \zeta_{UV}^{1\ loop} \hat{\sigma}^{1\ loop} \quad (4.29)$$

dove  $\zeta_{UV}^{1\ loop}$  è il contributo ultravioletto di  $\zeta^{1-loop}$ . Nella (4.29) è stato tenuto conto del fatto che ogni grafico ha un coefficiente 2.

- Abbiamo calcolato  $\zeta_{UV}^{1\ loop}$  a partire dal grafico  $W_{B0}$  riportato in Appendice C. Si ha:

$$\zeta_{UV}^{1-loop} = - \frac{\alpha}{2\pi} UV \quad (4.30)$$

# Capitolo 5

## Questioni aperte

In questo capitolo vogliamo brevemente riepilogare i risultati ottenuti e capire quale prezzo tali risultati richiedano in termini di nuove domande e problemi che l'approccio qui perseguito pone.

Abbiamo, in sintesi, mostrato come sia possibile generare i settori carichi di  $QED$  operando sul vuoto con campi composti (in termini degli usuali campi locali  $\psi$  e  $A_\mu$  di  $QED$  rinormalizzata con condizioni di normalizzazione 0n-shell) che, rinunciando per costruzione ad essere locali rispetto alla corrente elettrica, sono tuttavia determinati dalle seguenti richieste:

1. hanno carica globale non banale;
2. sono invarianti sotto trasformazioni di gauge locali;
3. sono covarianti sotto tutto il gruppo di simmetria della relatività ristretta.

Il proposito di questa tesi è stato quello di saggiare quanto la coesistenza di queste richieste sia scevra da contraddizioni. Lungi dal poter affermare che i campi da noi proposti diano luogo a delle funzioni di correlazione ben definite (fosse anche soltanto agli ordini finiti di teoria delle perturbazioni), ci siamo limitati a verificare che, almeno per la funzione a due punti, tutte le difficoltà che si presentano siano onestamente, cioè con una buona definizione, sormontabili. Il fatto che un calcolo analitico fino a due loop possa essere portato in fondo senza inconvenienti ci sembra un segnale incoraggiante, e al contempo non totalmente ovvio.

L'esperienza con questo calcolo ha mostrato che le seguenti affermazioni non sono implausibili:

- i campi in oggetto sono rinormalizzabili moltiplicativamente;
- essi danno luogo a funzioni di correlazione off-shell cui il campo dei fotoni contribuisce soltanto con i suoi due gradi di libertà fisici.

Quest'ultima proprietà non è certo una sorpresa, data la richiesta 2.

Abbiamo anche constatato che, da due loop in su, si incontra una caratteristica che è già dei campi neutri (si pensi al calcolo dispersivo di  $\langle T (j_\mu(x) j_\nu(0)) \rangle$  a due loop [33]), la possibilità, cioè, che singoli grafici (o meglio, le sector partitions ad essi associate) siano divergenti infrarossi. Abbiamo tuttavia visto all'opera un meccanismo, che è un'estensione di quello di [17] nel settore a carica zero (stiamo qui parlando di funzione di correlazione off-shell, non di sezioni d'urto inclusive) che garantisce che anche per i campi  $\Upsilon$  si ha cancellazione delle divergenze infrarosse pur di:

1. sommare tutti i grafici;
2. tenere in debito conto le divergenze infrarosse introdotte da condizioni di normalizzazione on-shell.

E finalmente, dopo aver superato tutte le difficoltà su esposte, abbiamo avuto un extra bonus: apparentemente (questo, ad oggi, lo abbiamo verificato solo a 1-loop) le correzioni radiative alla funzione di Wightman:

$$\hat{W}_2(p) = (2\pi) \theta(p_0) \delta(p^2 - m^2) (\not{p} + m) - \alpha \theta(p_0) \theta(p^2 - m^2) \frac{p^2 - m^2}{2 p^4} \not{p} + \dots (5.1)$$

o al propagatore:

$$\begin{aligned} i \mathcal{G}_2(p) &= \int d^4x e^{ipx} \theta(x_0) W_2(x) + \theta(-x_0) W_2(-x) \\ &= \frac{\not{p} + m}{m^2 - p^2 + i\epsilon} - \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{4p^2} \left( 1 - \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) \log\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right) \right) \not{p} + \dots \end{aligned} \quad (5.2)$$

(il che è lo stesso, assodato la liceità di una rappresentazione spettrale non sottratta), non modificano la singolarità all'albero, nel senso che

$$\lim_{p^2 \rightarrow m^2} (\not{p} - m) \hat{\mathcal{G}}_2(p) = 1 \quad (5.3)$$

Che  $\hat{\mathcal{G}}(p)$  abbia poi le usuali proprietà di analiticità nel piano complesso  $p^2$ , con un taglio per  $p^2 \geq m^2$ , è di nuovo conseguenza della rappresentazione spettrale e delle proprietà spettrali della funzione di Wightman ( $\propto \theta(p^0) \theta(p^2 - m^2)$ ) che il calcolo perturbativo esplicitamente espone.

Questa conclusione è la stessa di [10], ma l'apporto originale di questa tesi è di aver chiarito, speriamo a sufficienza, qual'è il corretto algoritmo di calcolo che produce la (5.3). Nel lavoro originale [10] l'affermazione che, facendo calcoli di tipo dispersivo, i vertici extra introdotti dalla definizione di  $\Upsilon$ , non andassero tagliati non era, per esplicita ammissione degli autori, sufficientemente giustificata.

Tuttavia, insieme con gli autori di [10], noi abbiamo l'ottimismo di interpretare la 5.3 come un'indicazione positiva circa la possibilità di estendere il formalismo di riduzione *LSZ* ai settori carichi di *QED*.



I puntini di sospensione nelle (5.1) e (5.2) indicano un primo limite di questa tesi, consistente nel non aver completato del tutto il calcolo analitico dei tagli a tre corpi. Quando tale calcolo sarà portato a termine saremo in grado di dire se anche le correzioni radiative a due loop sono consistenti con la (5.3). A tale riguardo siamo ottimisti. Speriamo addirittura che il comportamento near-mass-shell di  $\hat{\mathcal{G}}_2$  sia consistente con una struttura di esponenziazione simile alla (1.1a), ma, evidentemente, con tutt'altre possibilità di interpretazione.

Riassumendo: la sola funzione a due punti pone per l'immediato futuro i seguenti problemi:

1. Cancellazione delle divergenze infrarosse a tutti gli ordini di teoria delle perturbazioni.
2. Possibilità di estendere l'uso del Gruppo di Rinormalizzazione ai campi  $\Upsilon$ , per investigare il comportamento near-mass-shell delle relative funzioni a due punti.

Anche se uno fosse in grado di fornire risposte positive a questi due problemi, l'approccio da noi proposto presenterebbe ancora parecchie zone d'ombra:

- Non sappiamo al momento se la costruzione di  $\Upsilon$ , e la scelta  $n = p$  in particolare, permettono di calcolare altrettanto consistentemente funzioni di correlazione a più di due punti consistenti con gli assiomi di Wightman, località, evidentemente, esclusa.
- Non è evidente come recuperare una matrice  $S$  che sia identica a quella ben nota dagli anni '50 in poi (comprensiva delle divergenze infrarosse on-shell che modificano il comportamento delle predizioni fenomenologiche in maniera clamorosamente confermata da decenni di misure fatte dai fisici sperimentali).

In connessione con quest'ultimo problema, due rilievi tecnici sono già emersi nel corso della tesi.

Il primo è che, essendo i campi composti  $\Upsilon(x_1|\psi(x_1), \dots; A_\mu(z_1), \dots)$  costruiti tramite dei kernel non locali (le funzioni  $f_k(x_1 - z_1, \dots)$ ) è sorta una ambiguità quanto all'ordinamento temporale, a seconda se esso sia un  $T_{ext}$  riferito ai tempi "esterni"  $x_1, x_2, \dots$  o un semplice  $T$  riferito ai tempi "interni"  $z_1, z_2, \dots$  [22]. Abbiamo in particolare perso la possibilità di calcolare direttamente i valori di aspettazione sul vuoto di campi composti  $T_{ext}$  ordinati, come (5.2), e ci siamo dovuti limitare alle sole funzioni di Wightman dei campi  $\Upsilon$ , il che ha comunque richiesto l'uso delle  $T$ -sector-functions. Il fatto che nel caso della funzione a due punti esista la rappresentazione spettrale per passare dalla seconda alla prima non ci dá indicazione su come si possa calcolare, in una maniera pratica, e che non sia solo "in linea di principio", un qualsiasi valore d'aspettazione sul vuoto  $T_{ext}$  ordinato a più punti, evidentemente necessario per porre il problema dell'esistenza dei limiti asintotici di tali campi.

Il secondo è che, con l'apparire dei vertici extra, abbiamo visto come certe proprietà di fattorizzazione (di cui una è l'equazione di Schwinger-Dyson, che permette di introdurre in  $QED$  ordinaria la self-energia  $OPI$ ) non siano più operative per i campi  $\Upsilon$ . Abbiamo anzi enfatizzato il ruolo essenziale che, già per le funzioni a due punti, i grafici  $OPR$  hanno in alcune delle proprietà strutturali, rinormalizzabilità, gauge invarianza, realtà. Parimenti non ci aspettiamo che una funzione  $T_{ext}$  ordinata a  $n$  punti fattorizzi nel prodotto

di un vertice *OPI* per funzioni a due punti piene sulle gambe esterne: dunque anche una plausibile, ma per il momento ipotetica, validità della (5.3) a tutti gli ordini non troverebbe, nel nostro contesto, un'applicabilità altrettanto immediata come in una teoria di campo ordinaria.

I problemi sorti ci sembrano non insormontabili tecnicamente, e degni di ulteriore indagine. Degni per quanto senso si voglia dare al tentativo di promuovere *QED* (che è sempre, a tutt'oggi, l'unica teoria in accordo con le risultanze sperimentali con una precisione relativa, talvolta, di  $10^{-12}$ ), da una teoria di sole sezioni d'urto [30, 31, 32] ad una teoria in cui tutto l'apparato formale della Meccanica Quantistica sia esplicitamente rappresentato.

# Appendice A

In questa appendice riportiamo i risultati del calcolo dei grafici della classe "4 corpi". I grafici *OPI* presentano un integrando che contiene ben quattro funzioni  $\delta$ , il che rende il conto molto semplice: in pratica le  $\delta$  riducono il calcolo ad una sola integrazione. Nel caso dei grafici *OPR*, invece, le cose sono ancora più semplici perchè essi sono prodotti di grafici già visti all'ordine 1-loop. Nei risultati che seguono ogni coefficiente è stato tenuto conto del fattore  $(-1)$  di internal-sector.

$$\hat{\sigma}_{A4Rp} = - i \alpha^2 \frac{1}{4p^6} (7 - 17 p^2 + 9 p^4 + p^6) \quad (\text{A.1a})$$

$$\hat{\sigma}_{A4Rm} = + i \alpha^2 \frac{1}{4p^6} (1 + 9 p^2 - 17 p^4 + 7 p^6) \quad (\text{A.1b})$$

$$\hat{\sigma}_{C4Rp} = - i \alpha^2 \frac{1}{4p^6} (-1 + 7 p^2 - 7 p^4 + p^6) \quad (\text{A.1c})$$

$$\hat{\sigma}_{C4Rm} = - i \alpha^2 \frac{1}{2p^4} (1 - p^4) \quad (\text{A.1d})$$

$$\hat{\sigma}_{D4Rp} = - i \alpha^2 \frac{1}{4p^4} (-3 + 2 p^2 + p^4) \quad (\text{A.1e})$$

$$\hat{\sigma}_{D4Rm} = + i \alpha^2 \frac{1}{4p^4} (1 + 2 p^2 - 3 p^4) \quad (\text{A.1f})$$

$$\hat{\sigma}_{A4Ip} = + i \alpha^2 \frac{1}{p^6} (1 - 2 p^2 + p^4 + 2 p^2 \log(p)) \quad (\text{A.1g})$$

$$\hat{\sigma}_{A4Im} = + i \alpha^2 \frac{1}{2p^4} (-3 + 6 p^2 - 3 p^4 + 2 p^2 \log(p) + 2 p^4 \log(p)) \quad (\text{A.1h})$$

$$\hat{\sigma}_{C4Ip} = + i \alpha^2 \frac{1}{p^4} (-1 + p) (1 + p) (-1 + \log(p)) \quad (\text{A.1i})$$

$$\hat{\sigma}_{C4Im} = - i \alpha^2 \frac{1}{2p^4} (1 - p^4 + 6 p^2 \log(p) + 2 p^4 \log(p)) \quad (\text{A.1j})$$

$$\hat{\sigma}_{D4Ip} = - i \alpha^2 \frac{1}{2p^4} \frac{(2 + p^2 + p^4) (1 - p^2 + 2 \log(p))}{(-1 + p) (1 + p)} \quad (\text{A.1k})$$

$$\hat{\sigma}_{D4Im} = + i \alpha^2 \frac{1}{2p^2} \frac{(3 + p^2) (1 - p^2 + 2 p^2 \log(p))}{(-1 + p) (1 + p)} \quad (\text{A.1l})$$

# Appendice B

In questa appendice riportiamo i risultati del calcolo dei grafici della classe "2 corpi" limitatamente ai grafici *OPI*.

Definisco preliminarmente i seguenti integrali:

$$I_{a b c \dots} = \int d_4 k \frac{1}{D_a D_b D_c \dots} \quad (\text{B.1a})$$

$$I_{a b c \dots}^p = \int d_4 k \frac{1}{D_a D_b D_c \dots} p k \quad (\text{B.1b})$$

$$I_{a b c \dots}^w = \int d_4 k \frac{1}{D_a D_b D_c \dots} w k \quad (\text{B.1c})$$

$$I_{a b c \dots}^{w,p} = \int d_4 k \frac{1}{D_a D_b D_c \dots} w k p k \quad (\text{B.1d})$$

$$I_{a b c \dots}^0 = \int d_4 k \frac{1}{D_a D_b D_c \dots} k^2 \quad (\text{B.1e})$$

dove i possibili denominatori sono:

$$D_0 = k^2 - \mu^2 + i\epsilon \quad D_1 = (p - k)^2 - 1 + i\epsilon \quad (\text{B.2})$$

$$D_w = k^2 - 2wk + i\epsilon \quad D_p = -2pk + i\epsilon \quad (\text{B.3})$$

Una notazione, meno autoevidente, ma che è stata piú utile per manipolare, via computer, i vari passi del calcolo, è:

$$J1 = I_{01w} \quad J6 = I_{0pw} \quad J9 = I_{01pw} \quad (\text{B.4a})$$

$$J2 = I_{01w}^p \quad J7 = I_{0pw}^p \quad J10 = I_{01pw}^p \quad (\text{B.4b})$$

$$J3 = I_{01w}^w \quad J8 = I_{0pw}^w \quad J11 = I_{01pw}^w \quad (\text{B.4c})$$

$$J4 = I_{01w}^0 \quad J12 = I_{01pw}^0 \quad (\text{B.4d})$$

$$J5 = I_{01w}^{w,p} \quad J13 = I_{01pw}^{w,p} \quad (\text{B.4e})$$

$$J15 = I_{01w}^{p,p} \quad J14 = I_{01pw}^{p,p} \quad (\text{B.4f})$$

Si ha:

$$\hat{\sigma}_{A2Ip} = \frac{-4i\pi^2}{p^4} (-1+p^2) \left( -J1 + 2J2 - 2J3 + 4J5 - 2J1p^2 - 2J2p^2 - 2J3p^2 + J1p^4 \right) \quad (\text{B.5a})$$

$$\hat{\sigma}_{A2Im} = \frac{8i\pi^2}{p^2} (-1+p^2) (-J2 - 3J3 + J4 + J1p^2) \quad (\text{B.5b})$$

$$\hat{\sigma}_{B2Ip} = \frac{4i\pi^2}{p^4} \left( J1 - 4J15 - 2J2 + 6J2p^2 - 2J3p^2 + J4p^2 + 4J5p^2 - J1p^4 - 2J3p^4 - J4p^4 \right) \quad (\text{B.5c})$$

$$\hat{\sigma}_{B2Im} = \frac{4i\pi^2}{p^2} \left( 4J15 - 4J2 + J4 - 4J5 + 2J1p^2 + 4J3p^2 - J4p^2 - 2J1p^4 \right) \quad (\text{B.5d})$$

$$\hat{\sigma}_{C2Ip} = \frac{-4i\pi^2}{p^4} (-1+p^2) \left( -2J10 + 4J14 - J9 - 4J10p^2 - 4J11p^2 + J12p^2 - J9p^2 - 2J10p^4 + J12p^4 + J9p^4 + J9p^6 \right) \quad (\text{B.5e})$$

$$\hat{\sigma}_{C2Im} = \frac{4i\pi^2}{p^2} (-1+p^2) \left( -2J11 + J12 + 4J14 - 4J9 - 8J10p^2 - 2J11p^2 + J12p^2 + 4J9p^4 \right) \quad (\text{B.5f})$$

$$\hat{\sigma}_{D2Ip} = \frac{4i\pi^2}{p^4} \left( 2J10 - 4J14 + 2J10p^2 - 2J11p^2 + J12p^2 + 4J13p^2 - J9p^2 - 2J11p^4 - 2J12p^4 + 4J13p^4 - 4J14p^4 + J9p^4 + 4J10p^6 - 4J11p^6 + J12p^6 + J9p^6 - J9p^8 \right) \quad (\text{B.5g})$$

$$\hat{\sigma}_{D2Im} = \frac{-4i\pi^2}{p^2} \left( -4J14 + J9 + 6J10p^2 - 2J11p^2 + 8J13p^2 - 4J14p^2 - J9p^2 + 2J10p^4 - 6J11p^4 - J9p^4 + J9p^6 \right) \quad (\text{B.5h})$$

$$\hat{\sigma}_{E2Ip} = \frac{-4i\pi^2}{p^2} (-J6 - 2J7p^2 + 2J8p^2 + J6p^4) \quad (\text{B.5i})$$

$$\hat{\sigma}_{E2Im} = \frac{4i\pi^2}{p^2} (J6 - 2J7 + 2J8p^2 - J6p^4) \quad (\text{B.5j})$$

$$\hat{\sigma}_{G2Ip} = \frac{-8i\pi^2}{-p^2 + p^4} \left( -J6 + 2J7 + J6p^2 - 2J8p^2 + J6p^4 + 2J7p^4 - 2J8p^4 - J6p^6 \right) \quad (\text{B.5k})$$

$$\hat{\sigma}_{G2Im} = \frac{-16i\pi^2}{-1+p^2} (-J7 - J7p^2 + 2J8p^2) \quad (\text{B.5l})$$

Esprimiamo questi integrali in termini di altri più semplici. Queste sono le relazioni tra gli integrali:

$$J4 - 2 J3 = I_{0\ 1} \quad (\text{B.6a})$$

$$J4 - 2 J2 + (p^2 - m^2) J1 = I_{0\ w} \quad (\text{B.6b})$$

$$J10 = -\frac{1}{2} I_{0\ 1\ w} \quad (\text{B.6c})$$

$$J13 = -\frac{1}{2} J3 \quad (\text{B.6d})$$

$$J12 = I_{1\ w\ p} \quad (\text{B.6e})$$

$$J12 - 2 J11 = I_{0\ 1\ p} \quad (\text{B.6f})$$

$$J6 - J1 = (p^2 - m^2) J9 + J12 \quad (\text{B.6g})$$

$$J14 = -\frac{1}{2} J2 \quad (\text{B.6h})$$

$$J5 = \frac{1}{2} (I_{1\ w}^p - I_{0\ 1}^p) \quad (\text{B.6i})$$

$$(p^2 - m^2) J2 - 2 J15 = I_{0\ w}^p - I_{1\ w}^p \quad (\text{B.6j})$$

$$J8 - \frac{p^2 + m^2}{2p^2} J7 = K \quad (\text{B.6k})$$

$$J7 = -\frac{1}{2} I_{0\ w} \quad (\text{B.6l})$$

$$(\text{B.6m})$$

dove:

$$K = I_{0\ p\ w}^w - \frac{p^2 + m^2}{2p^2} I_{0\ p\ w}^p \quad (\text{B.7})$$

Questioni esclusivamente tecniche impongono di calcolare questo integrale piuttosto che i suoi singoli pezzi. Il valore dei 10 integrali fondamentali è:

$$I_{01} = \frac{i}{16\pi^2} \left( 2 + UV - \frac{(-1 + p^2) \log(1 - p^2)}{p^2} \right) \quad (\text{B.8a})$$

$$I_{01}^p = \frac{i}{32\pi^2} p^2 \left( 2 - p^{-2} + UV - \frac{(-1 + p^2)^2 \log(1 - p^2)}{p^4} \right) \quad (\text{B.8b})$$

$$I_{01w} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{p^2 - 1} \left( \frac{\pi^2}{6} - \text{Li}_2(2, p^2) \right) \quad (\text{B.8c})$$

$$I_{1w} = \frac{i}{16\pi^2} UV \quad (\text{B.8d})$$

$$I_{1w}^p = \frac{i}{64\pi^2} (1 + 3p^2) UV \quad (\text{B.8e})$$

$$I_{0wp} = \frac{-i \left( \log(p^{-2})^2 + 4 \log\left(\frac{p}{2}\right) \log(p) - \text{Li}_2(2, 1 - p^{-2}) + \text{Li}_2(2, 1 - p^2) \right)}{(1 - p^2) 32\pi^2} \quad (\text{B.8f})$$

$$I_{1wp} = \frac{i}{16\pi^2} \frac{1}{p^2 - 1} \log(1 - \sqrt{1 - p^{-2}}) \log(1 + \sqrt{1 - p^{-2}}) \quad (\text{B.8g})$$

$$I_{0w}^p = \frac{i}{64\pi^2} (1 + p^2) (1 + UV) \quad (\text{B.8h})$$

$$I_{01p} = \frac{i}{16\pi^2} \left( -\frac{\log(1 - p^2)}{p^2} - \frac{\log\left(\frac{p - \sqrt{-1 + p^2}}{p + \sqrt{-1 + p^2}}\right)}{p \sqrt{-1 + p^2}} \right) \quad (\text{B.8i})$$

$$K = \frac{i}{32\pi^2} \frac{1}{p^2} (-1 + p^2) \log(p) \quad (\text{B.8j})$$

$$I_{0w} = \frac{i}{16\pi^2} (2 + UV) \quad (\text{B.8k})$$

Le funzioni  $Li_2$  sono definite in [33, 34, 35].

# Appendice C

In questa appendice riportiamo i risultati del calcolo dei grafici della classe "2 corpi" limitatamente ai grafici *OPR*.

In questo caso il calcolo è molto più semplice perchè questi grafici si possono esprimere in termini dei grafici dell' ordine 1-loop e dei due grafici:

I due grafici precedenti si possono parametrizzare in termini degli integrali visti precedentemente. Si ha:

$$\hat{\Sigma} = \hat{\Sigma}_p \not{p} + \hat{\Sigma}_m m \quad (\text{C.1})$$

$$\hat{\Sigma}_p = 8 \pi^2 (I_{01} - \frac{1}{p^2} I_{01}^{pk}) \quad (\text{C.2})$$

$$\hat{\Sigma}_m = - 16 \pi^2 I_{01} \quad (\text{C.3})$$

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_p \not{p} + \hat{\sigma}_m m \quad (\text{C.4})$$

$$\hat{\sigma}_p = - 4 \pi^2 (I_{01} + 2 (p^2 - m^2) I_{01p}) \quad (\text{C.5})$$

$$\hat{\sigma}_m = 4 \pi^2 I_{01} \quad (\text{C.6})$$

Allora i risultati del calcolo dei grafici di questa classe è:

$$\hat{\sigma}_{A2Rp} = \frac{1}{8p^6} \left( 11 p^2 - 19 p^4 - 2 p^6 + 4 p^2 UV - 9 p^4 UV - p^6 UV + \right. \\ \left. 7 \log(1 - p^2) - 17 p^2 \log(1 - p^2) + 9 p^4 \log(1 - p^2) + p^6 \log(1 - p^2) \right) \quad (\text{C.7a})$$



$$\hat{\sigma}_{A2Rm} = \frac{1}{8p^6} \left( -p^2 - 23p^4 + 14p^6 - 13p^4 UV + 7p^6 UV \right. \\ \left. - \log(1-p^2) - 9p^2 \log(1-p^2) + 17p^4 \log(1-p^2) - 7p^6 \log(1-p^2) \right) \quad (\text{C.7b})$$

$$\hat{\sigma}_{B2Rp} = \frac{1}{8p^6} \left( -p^2 + 13p^4 - 2p^6 + 7p^4 UV - p^6 UV \right. \\ \left. - \log(1-p^2) + 7p^2 \log(1-p^2) - 7p^4 \log(1-p^2) + p^6 \log(1-p^2) \right) \quad (\text{C.7c})$$

$$\hat{\sigma}_{B2Rm} = \frac{1}{4p^4} \left( 3p^2 + 2p^4 + 2p^2 UV + p^4 UV + \log(1-p^2) - p^4 \log(1-p^2) \right) \quad (\text{C.7d})$$

$$\hat{\sigma}_{C2Rp} = \frac{(-1+p)(1+p)}{8p^6 \sqrt{-1+p^2}} \left( 2p^2 \sqrt{-1+p^2} + 2p^4 \sqrt{-1+p^2} + p^2 \sqrt{-1+p^2} UV + \right. \\ \left. + p^4 \sqrt{-1+p^2} UV + \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) - 6p^2 \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + \right. \\ \left. + p^4 \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) - 6p^3 \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) + 2p^5 \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) \right) \quad (\text{C.7e})$$

$$\hat{\sigma}_{C2Rm} = \frac{(-1+p)(1+p)}{4p^4 \sqrt{-1+p^2}} \left( -4p^2 \sqrt{-1+p^2} - 2p^2 \sqrt{-1+p^2} UV - \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) - \right. \\ \left. - p^2 \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + p \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) - 3p^3 \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) \right) \quad (\text{C.7f})$$

$$\hat{\sigma}_{D2Rp} = \frac{(-1+p)(1+p)}{8p^4 \sqrt{-1+p^2}} \left( 2p^2 \sqrt{-1+p^2} + p^2 \sqrt{-1+p^2} UV + 3\sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + \right. \\ \left. + p^2 \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + 2p \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) + 2p^3 \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) \right) \quad (\text{C.7g})$$

$$\hat{\sigma}_{D2Rm} = \frac{(-1+p)(1+p)}{8p^4 \sqrt{-1+p^2}} \left( 2p^2 \sqrt{-1+p^2} + p^2 \sqrt{-1+p^2} UV + \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + \right. \\ \left. + 3p^2 \sqrt{-1+p^2} \log(1-p^2) + 4p^3 \log\left(\frac{p-\sqrt{-1+p^2}}{p+\sqrt{-1+p^2}}\right) \right) \quad (\text{C.7h})$$

# Bibliografia

- [1] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980
- [2] H. Stapp, T.Kawai, *Quantum Electrodynamics at Large Distancies Preprint,LBL-25819* Nov. '93
- [3] H. Stapp, T.Kawai, *Phys. Rew. Lett.* **50**(1983), 467
- [4] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Interscience, New York 1959
- [5] R. Ferrari, L. E. Picasso, F. Strocchi, *Comm. Math. Phys.* **35** (1974), 25
- [6] F. Strocchi, A. Wightman, *J. Math. Phys.* **15** (1974), 2198
- [7] F. Strocchi, *Phys. Rev.* **D17** (1978), 2010
- [8] J. Fröhlich, G. Morchio, F. Strocchi, *Ann. Phys. (N.Y.)* **119** (1979), 241
- [9] P.A.M. Dirac, *Canad. J. Phys.* **33**(1955), 650
- [10] E. d'Emilio, M. Mintchev, *Fortschr. Phys.* **32** (1984), 473
- [11] A. Ostendorf, *Ann. Inst. H. Poincaré* **40** (1984), 273
- [12] O. Steinmann, *Comm. Math. Phys.* **152** (1993), 627
- [13] M. Abe, *Ins. J. Mod. Phys.* **A8**(1993), 2895
- [14] M. Abe, N. Nakanishi, *Prog. Th. Phys.* **90**(1993), 705
- [15] G. 't Hooft, M. Veltman, *Diagrammar*, CERN Report 73-9, Geneva 1973
- [16] E. d'Emilio, M. Mintchev, *Nuovo Cimento* **69** (1982), 43
- [17] D. R. Yennie, S. Frautschi, H. Suura, *Ann. Phys. (N.Y.)* **13** (1961), 379
- [18] L. Landau, *Teoria Quantistica Relativistica*, Editori Riuniti, 1978
- [19] O. Steinmann, *Helv. Phys. Acta* **58**(1985), 995

- [20] O. Steinmann, *Ann. Phys.* **157** (1984), 232
- [21] T. Kugo, I. Ojima, *Suppl. Progr. Theor. Phys.* **66** (1979), 1
- [22] E. d'Emilio, S. Catani, *Fortschr. Phys.* **40** (1992), 7
- [23] S. Mandelstam, *Ann. Phys. (N.Y.)* **19**(1962), 1
- [24] A. S. Wightman, *Phys. Rev.* **101** (1956), 860
- [25] N.N. Bogoliubov, A. Logunov, I.T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, Benjamin, Reading,MA,1975
- [26] R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Sin and Statics and all that*, Addison Wesley,1989
- [27] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, Singapore 1987
- [28] D. Lurie, *Particle and Fields*,Interscience, (N.Y.) 1968
- [29] A. Bassetto, R. Soldati, G. Nardulli, *Y. M. T. in Algebraic non Covariant Theories*, World Scietific,Singapore 1991
- [30] F. Block, A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **54**(1937), 54
- [31] G. Grammer, D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **D8** (1973), 4332
- [32] C. P. Korthals-Altes, E.De Rafael, *Nucl. Phys.* **B106** (1976), 237
- [33] G. Källen, A. Sabry, *Dan. Mat. Fys. Medd.* **29**(1955), 17
- [34] R. Barbieri, J.A. Mignaco, E. Remiddi, *Il Nuovo Cimento* **11A**(1972), 824
- [35] A. Sabry, *Nucl. Phys.* **33**(1962), 401
- [36] S. Wolfram, *Mathematica - A system for Doing Mathematics by Computer* **Addison-Wesley Publishing Company Inc.**(1988)
- [37] M. Jamin,M. Lautenbacher, *A Mathematica Package for  $\gamma$ -algebra in Arbitrary Dimensions* **Preprint,TUM - T31 - 20/91**Sept '91

# The End

Piú che una pagina di ringraziamenti, questa vuole essere un pó il riassunto di questi sette anni trascorsi qua dentro. Mi pare questo il momento di farlo, proprio ora che sto stampando la prima copia della mia tesi, a poche ore, e non è retorico, dalla consegna.

Le aspirazioni e le intenzioni con le quali sono entrato qui sono le une sfumate, le altre ... messe a dura prova. È sfumato il sogno, romantico ed ingenuo, dello scienziato geniale che va a caccia dei Segreti dell' Universo ed al suo posto si è installata la figura dell' artigiano che va a caccia di  $i$  e di  $\epsilon$ , di grafici e di integrali, ciò di cui questa tesi è fatta, cesellatore di segni - ed ubriacato di divergenze.

Colpa o merito di ciò è del capo.