S Modica, 26 Marzo 2009

1. Considera il consumatore con utilità $u(x,y) = 3\ln x + 2y$ e reddito m; con prezzi $p_x = 0.5$, $p_y = 1$, il suo problema è

$$\max_{(x,y)} \; 3\ln x + 2y \quad \textit{sul vincolo} \quad 0.5\,x + y = m\,.$$

Poiché in questo caso $u_x/u_y = 1.5/x$, la condizione di tangenza $u_x/u_y = p_x/p_y$ dà $x = 3$. Ma $x = 3$ è una scelta possibile solo se $m \geq 1.5$ (per inciso, se non disegni non capisci niente). Se $m < 1.5$, in tutti i punti sul vincolo $x < 3$ sicché $u_x/u_y = 3/2x > 1/2 = p_x/p_y$, dunque la scelta ottima ha $y = 0$ ed $x = 2m$.

Nella figura qui sotto sono disegnate un pò di curve di indifferenza e i vincoli di bilancio corrispondenti ad $m = 1$ ed $m = 2$. Dalla Figura 1 tutto dovrebbe essere chiaro.

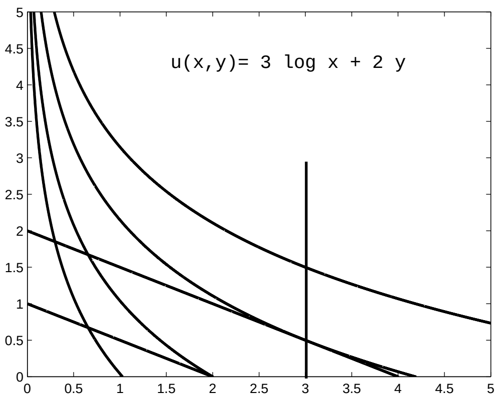

FIGURA 1. Le curve di indifferenza sono $u = 3\ln 2 - 1,\; u = 3\ln 2,\; u = 3\ln 3 + 1,\; u = 3\ln 3 + 2$. I vincoli di bilancio sono disegnati per $m = 1$ ed $m = 2$.

Consideriamo le scelte ottime come funzione del reddito, indicandole con $x(m)$ ed $y(m)$ fissando p_x e p_y. Analogamente a quanto detto per $(p_x, p_y) = (0.5, 1)$, per $m < 1.5\,p_y$ abbiamo $x(m) = m/p_x$ ed $y(m) = 0$; per $m \geq 1.5\,p_y$ abbiamo $x(m) = 1.5\,p_y/p_x$ ed $y(m) = m/p_y - 1.5$; vedi Figura 2. Quindi x è un bene normale, 'strettamente' fino ad $m = 1.5\,p_y$, poi 'debolmente'. Analogo discorso per y.

Consideriamo ora le scelte ottime come funzioni di domanda, $x(p_x)$ ed $y(p_y)$. Prendiamo x; m e p_y sono costanti, quindi il vincolo ruota intorno a $(0, m/p_y)$. La condizione $u_x/u_y = p_x/p_y$ dà $x = 1.5p_y/p_x$; e il punto sul vincolo con $y = 0$ ha $x = m/p_x$. Dunque se $1.5p_y/p_x > m/p_x$, cioè $m < 1.5\,p_y$, la scelta ottima ha sempre $y = 0$, dunque $x(p_x) = m/p_x$. Se invece $m \geq 1.5\,p_y$, la condizione di tangenza è soddisfatta in un punto interno al vincolo, quindi $x(p_x) = 1.5\,p_y/p_x$. In conclusione $x(p_x)$ è sempre una iperbole. Per y la situazione è diversa: per $m < 1.5\,p_y$, cioè $p_y > m/1.5$, abbiamo visto che $y(p_y) = 0$; per $p_y \leq m/1.5$, da $x(p_x) = 1.5\,p_y/p_x$ segue (usando il vincolo) $y(p_y) = m/p_y - 1.5$. La funzione $y(p_y)$ è disegnata nella Figura 3.

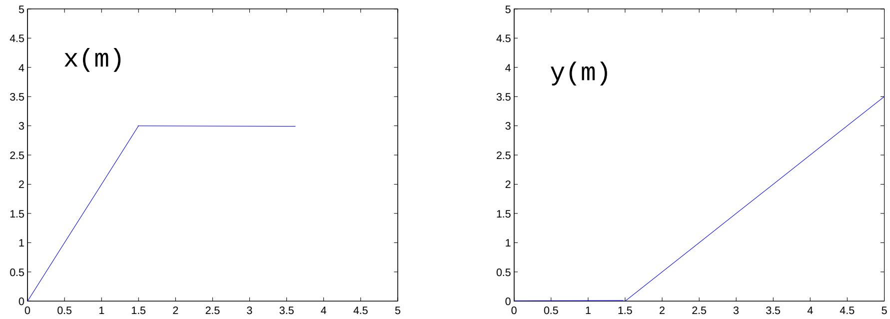

FIGURA 2. La figura è disegnata per $(p_x, p_y) = (0.5, 1)$. $x(m)$ ha pendenza $1/p_x$ fino ad $m = 1.5\, p_y$, poi è costante. $y(m)$ è zero fino ad $m = 1.5\, p_y$, poi ha pendenza $1/p_y$.

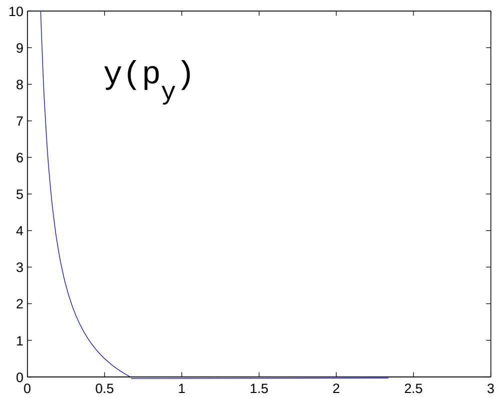

FIGURA 3. La Figura è disegnata per $m = 1$, sicché l'iperbole tocca l'asse orizzontale per $p_y = 2/3$.

2. Considera ora il consumatore con utilità

$$u(x, y) = \min\{x, y\} + y\,.$$

Qui per $x < y$ è $u = x + y$, per $x > y$ $u = 2y$. Quindi le curve di indifferenza sono come quelle tracciate nella Figura 4. Ovviamente la scelta ottima è $x = 0$ per $p_x > p_y$, $x = y$ altrimenti.

3. In un libro di esercizi (che io non consiglio!) si asserisce che le due funzioni di utilità

$$u_1(x, y) = \min\{x, y\} + y\,, \quad u_2(x, y) = 3\min\{x, y\} + y$$

sono equivalenti. Dimostra che non lo sono affatto, trovando prezzi e reddito per i quali le due funzioni producono scelte diverse fra loro.

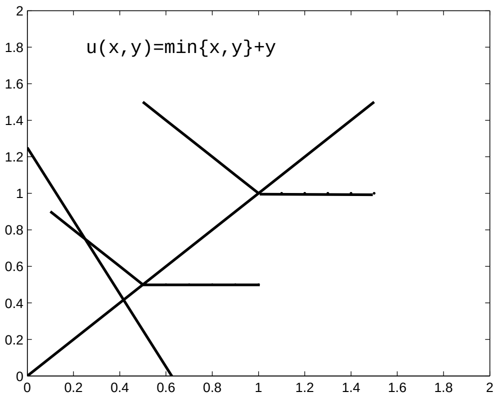

FIGURA 4. La Figura riporta le curve di indifferenza $u = 1$ ed $u = 2$. Il vincolo di bilancio disegnato è $2x + y = 1.25$.

Per vostra comodità sono qui sotto riportati pezzi di codice MATLAB usato per costruire le figure. Purtroppo il programma non è Open Source. Un programma equivalente, nel quale dovrebbe essere facile tradurre il codice, è R-CRAN. Io oggi non ho tempo di fare la traduzione.

```
Per la Figura 1:

x=0:1/1000:5;
plot(x,1.5*log(3)+.5-1.5*log(x),x,2-0.5*x,x,1-.5*x,...
    x,1.5*log(2)-1.5*log(x),x,1.5*log(2)-1-1.5*log(x),...
    x,1.5*log(3)+1+.5-1.5*log(x),'Color','k','Linewidth',2)
axis([0 5 0 5])
annotation('line',[0.5946 0.5946],[0.1061 0.5905],'Color','k','Linewidth',2);
annotation('textbox',[0.4796 0.7643 0.2625 0.05952],...
    'String',{'u(x,y)= 3 log x + 2 y'},...
    'FontSize',14,...
    'FontName','Courier 10 Pitch',...
    'LineStyle','none');

Per la Figura 4:

x=0:.5:1.5;
x1=0.1:.1:.5;
x2=0.5:.1:1;
x3=0.5:.1:1;
x4=1:.1:1.5;
plot(x,x,x,1.25-2*x,x1,1-x1,x2,.5,x3,2-x3,x4,1,...
   'Color','k','Linewidth',2)
% Create lines
annotation('line',[0.5196 0.7089],[0.5157 0.5143],'Color','k','Linewidth',2);
annotation('line',[0.3232 0.5196],[0.3133 0.3133],'Color','k','Linewidth',2);
axis([0 2 0 2])
```